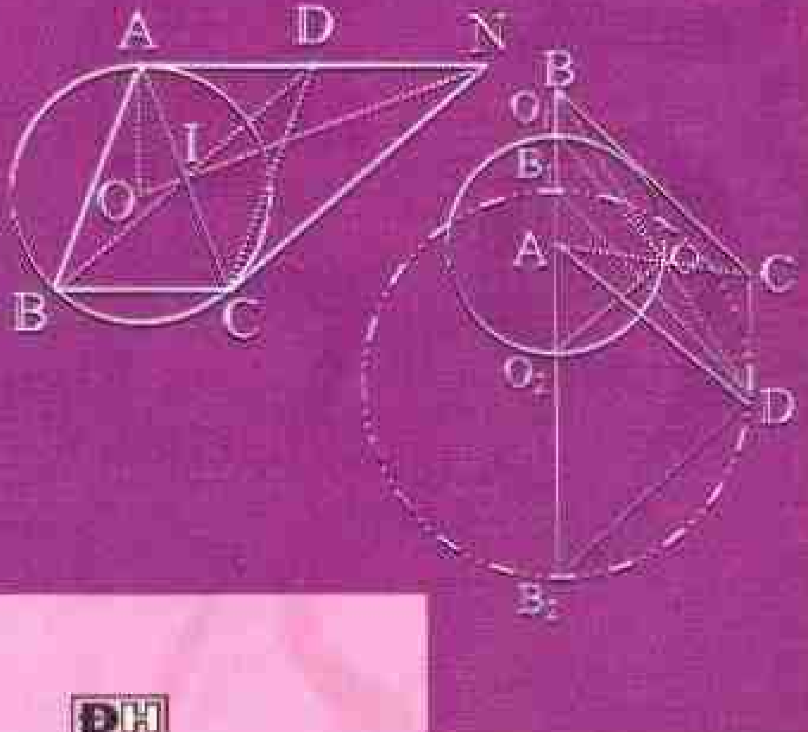
ThS. LÊ ĐỨC

- Bồi dưỡng họ
sinh khá - giỏi
- Nâng cao kĩ năng
và phương pháp
giải các dạng
bài tập

# Các dạng Toán điển hình 9*




NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ ĐỨC

• Biên soạn theo chương trình SGK mới.
• Rèn kĩ năng giải bài tập và luyện thi cuối cấp.

# Các dạng
# Toán điển hình
# 9*

- *Căn bậc hai - Căn bậc ba*
- *Hàm số bậc nhất*
- *Hệ thức lượng trong tam giác vuông*
- *Đường tròn*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

# GIỚI THIỆU CHUNG

*Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:*

**CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 9 - TẬP 1**

*Cuốn sách bao gồm 2 phần với 4 chương:*

**PHẦN ĐẠI SỐ**

**Chương I – CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA**

**Chương II – HÀM SỐ BẬC NHẤT**

**PHẦN HÌNH HỌC**

**Chương I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

**Chương II – ĐƯỜNG TRÒN**

*Ở mỗi chương chứa đựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.*

*Mỗi bài đều được chia thành 4 mục:*

A. ***Tóm tắt lí thuyết***: *Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.*

B. ***Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)***
*Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kĩ năng giải Toán.*

C. ***Bài tập luyện tập***

D. ***Hướng dẫn – Đáp số***

*Như vậy, ở mỗi bài:*

1. *Với việc trình bày mục tóm tắt lí thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì?*
2. *Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

*Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.*

*Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:*

**- Trung tâm Sách giáo dục Anpha**
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
**- Công ti Sách - thiết bị giáo dục ANPHA**
50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, TP.HCM
ĐT: 08.62676463, 38547464.
Email: *alphabookcenter@yahoo.com*

Xin trân trọng cảm ơn!

# PHẦN ĐẠI SỐ

## CHƯƠNG I – CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

### CHỦ ĐỀ 1 CĂN BẬC HAI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ**

***Định nghĩa***: *Căn bậc hai số học của một số* $a \geq 0$ *là một số* x *không âm mà bình phương của nó bằng* a. Kí hiệu $\sqrt{a}$.

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}, \text{ với } a \geq 0.$$

**Tổng quát trên R:**

1. Mọi số dương $a > 0$ có hai căn bậc hai là hai số đối nhau:
   - $\sqrt{a} > 0$ gọi là căn bậc hai số học hay còn gọi là căn bậc hai dương của a.
   - $-\sqrt{a} < 0$ gọi là căn bậc hai âm của a.
2. Số 0 có căn bậc hai duy nhất là 0.
3. Số âm không có căn bậc hai.

**2. SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI SỐ HỌC**

***Định lí***: Với hai số a, b không âm, ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Tính* $\sqrt{16}$, $\sqrt{1{,}44}$, $\sqrt{(-8)^2}$.

*Giải*

Ta có ngay: $\sqrt{16} = 4$ vì $4 > 0$ và $4^2 = 16$.

$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ vì $1{,}2 > 0$ và $(1{,}2)^2 = 1{,}44$.

$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ vì $8 > 0$ và $8^2 = 64$.

***Chú ý***: Rất nhiều học sinh nhầm lẫn công thức:

$\sqrt{a^2} = a$, dẫn tới cho rằng $\sqrt{(-8)^2} = -8$.

Cần chú ý rằng: $\sqrt{a^2} = |a|$, do đó $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.

**Ví dụ 2:** *Tính giá trị của các biểu thức sau:*

a. $\sqrt{0,16}+\sqrt{\dfrac{4}{25}}$. b. $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}-\sqrt{0,36}$.

*Giải*

a. Ta có: $\sqrt{0,16}+\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\sqrt{(0,4)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=0,4+\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$.

b. Ta có: $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}-\sqrt{0,36}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{4}\right)^2}-\sqrt{(0,6)^2}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{23}{20}$.

**Ví dụ 3:** *Trong các số* $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$, $-\sqrt{(-3)^2}$, $-\sqrt{3^2}$ *số nào là căn bậc hai số học của 9.*

*Giải*

Các số $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$ là căn bậc hai số học của 9 bởi vì:

$$\sqrt{9}=\sqrt{(-3)^2}=3>0 \text{ và } \sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3>0.$$

**Ví dụ 4:** *Tìm* x, *biết:*

a. $x^2=\dfrac{16}{9}$. b. $(x-1)^2=\dfrac{1}{9}$.

*Giải*

a. Ta có: $x^2=\dfrac{16}{9}=\left(\pm\dfrac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{4}{3}$.

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right\}$.

b. Ta có: $(x-1)^2=\dfrac{1}{9}=\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x-1=\pm\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ hoặc $x=\dfrac{2}{3}$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$.

***Nhận xét:*** Như vậy, thông qua ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với việc sử dụng khái niệm căn bậc hai để tìm nghiệm của phương trình. Tuy nhiên, chúng ta mới chỉ bắt đầu với phương trình dạng $x^2=a^2$ hoặc cần biến đổi đôi chút để có được dạng này hoặc sử dụng hằng đẳng thức, cụ thể:

$$x^2=\frac{16}{9} \Leftrightarrow x^2-\frac{16}{9}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{3}.$$

Ví dụ tiếp theo sẽ nâng mức tiếp cận cho chúng ta.

**Ví dụ 5:** *Tìm x, biết:*

a. $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.　　　　b. $(2x - 1)^2 = |1 - 2x|$.

*Giải*

a. Ta biến đổi phương trình:

$$x^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{3} - 1) \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\sqrt{3} - 1; 1 - \sqrt{3}\}$.

b. Nhận xét rằng $(2x - 1)^2 = |1 - 2x|^2$, do đó phương trình được viết dưới dạng:

$$|1 - 2x|^2 = |1 - 2x| \Leftrightarrow |1 - 2x|(|1 - 2x| - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1 - 2x| = 0 \\ |1 - 2x| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 2x = 0 \\ 1 - 2x = 1 \\ 1 - 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{0; \frac{1}{2}; 1\}$.

☛ ***Chú ý***: Chúng ta đã biết rằng: $a^2 \geq 0$ và $b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 0$

điều đó cho thấy: $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ và $b = 0$

đó chính là kết quả được sử dụng trong câu b).

**Ví dụ 6:** *So sánh các số* $x = 4\sqrt{3}$ *và* $y = 3\sqrt{4}$.

*Giải*

Ta có: $x^2 = (4\sqrt{3})^2 = 16.3 = 48$ và $y^2 = (3\sqrt{4})^2 = 9.4 = 36$.

Nhận thấy $x^2 > y^2$ mà x và y dương nên $x > y$.

☛ ***Nhận xét***: Để so sánh hai số, nhiều khi ta cần so sánh bình phương của chúng. Khi đó, cần lưu ý:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$$

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|.$$

Các kết quả trên sẽ cho phép chúng ta tìm được nghiệm của bất phương trình.

**Ví dụ 7:** *Tìm giá trị của* x, *biết:*

a. $x^2 < 25$.　　　　b. $x^2 + 2x - 3 > 0$.

*Giải*

Ta biết với $a > 0$ thì: $x^2 > a^2 \Leftrightarrow |x| > a$ và $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < a$.

a. Ta có: $x^2 < 25 = 5^2 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

b. Ta biến đổi: $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 > 2^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3 \end{array}\right..$$

☛ ***Chú ý***: Các em học sinh cần thận trọng khi giải dạng bài này vì có thể mắc phải sai lầm dẫn đến làm mất nghiệm $x^2 > 4^2 \Leftrightarrow x > 4$ hoặc thừa nghiệm $x^2 < 5^2 \Leftrightarrow x < 5$.

**Ví dụ 8:** *Tìm giá trị của* x, *biết*:

a. $x^2 + 2x - 3 > 0$. b. $4x^2 - 4x < 8$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 > 2^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3 \end{array}\right..$$

b. Ta biến đổi:

$$4x^2 - 4x < 10 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 < 9 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 < 3^2$$

$$\Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

☛ ***Chú ý***: Từ định nghĩa về căn bậc hai, chúng ta có mở rộng:

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases},$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow A = B \geq 0.$$

Kết quả trên sẽ được sử dụng nhiều trong bài toán giải phương trình.

**Ví dụ 9:** *Giải các phương trình sau*:

a. $\sqrt{x - 1} = 3$. b. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt{x - 1})^2 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 10$.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Thực hiện phép tính:

a. $(-5)^2.\left(-\frac{7}{5}\right)^2$.  b. $(-0,25)^2 : \left(\frac{3}{100}\right)^2$.

**Bài 2**: Tìm x, biết:

a. $x^2 = 9$.

b. $x^2 = (-2)^2$.

c. $4x^2 + 1 = 8 - 2\sqrt{6}$.

d. $x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6}$.

**Bài 3**: So sánh các cặp số sau:

a. 0,3 và 0, 2(5).

b. $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ và $2\sqrt{\frac{1}{3}}$

c. $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$.

d. $6\sqrt{\frac{2}{7}}$ và $7\sqrt{\frac{2}{6}}$

**Bài 4:** Chứng minh các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

a. $x^2 + 1 \geq 2x$.  c. $x^2(x^2 - 1) \geq x^2 - 1$.

b. $2x^2 + 2x - 1 \geq -15$.  d. $9x^2 + 6ax + a^2 + 8 > 0$, a là hằng số.

**Bài 5:** Tìm giá trị của x biết:

a. $x^2 \geq 25$ ; $x^2 < 25$;  c. $x^2 - 1 < 9$;

b. $x^2 + 2x - 5 \geq 0$;  d. $x^2 + 6ax + 9a^2 - 4 > 0$, a là hằng số.

**Bài 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 8 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

**Bài 7:** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 11 - \sqrt{x^2 + 7x + 6}$.

**Bài 8:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a. $A = 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$.  c. $C = \sqrt{x^2 - 7x + 6} - 25$.

b. $B = \sqrt{x^2 - 7x + 5}$.  d. $D = x^2 - 6x + 11$.

**Bài 9:** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a. $A = 15 - \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.  c. $C = 12 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

b. $B = -3x^2 + 6x - 15$.  d. $D = 17 + 10x - x^2$.

**Bài 10:** Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{2x - 1} = 1$.

b. $\sqrt{x^2 + 5} = x + 1$.

c. $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 2x}$.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** a. 49.  b. $\frac{625}{9}$

**Bài 2:**

a. Ta có: $x^2 = 9 = (\pm 3)^2 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là S = {3 ; − 3}.

b. Ta có: $x^2 = (-2)^2 \Leftrightarrow x = \pm|-2| = \pm 2$.

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{2\,;\,-2\}$.

c. Ta có:

$$4x^2 + 1 = 8 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (2x)^2 = 7 - 2\sqrt{6} = 6 - 2\sqrt{6} + 1 = (\sqrt{6} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm(\sqrt{6} - 1) \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1)$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1)\,;\,-\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1)\}$.

d. Ta có:

$$x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x^2 = 5 - 2\sqrt{6} = 3 - 2\sqrt{3}.\sqrt{2} + 2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\sqrt{3} - \sqrt{2}\,;\,\sqrt{2} - \sqrt{3}\}$.

**Bài 3:**

a. $0{,}3 > 0{,}2(5)$.

b. Ta có: $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16.\frac{1}{2} = 8$ và $\left(2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4.\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$;

Nhận thấy $\frac{4}{9} < 8$, do đó $4\sqrt{\frac{1}{2}} > 2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

c. Ta có: $(2\sqrt{3})^2 = 4.3 = 12$ và $(3\sqrt{2})^2 = 9.2 = 18$

Nhận thấy $12 < 18$, do đó $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

d. Ta có: $\left(6\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2 = 36.\frac{2}{7} = \frac{72}{7}$ và $\left(7\sqrt{\frac{2}{6}}\right)^2 = 49.\frac{2}{6} = \frac{98}{6}$

Nhận thấy $\frac{98}{6} = \frac{72}{6} + \frac{25}{6} > \frac{72}{7}$, do đó $6\sqrt{\frac{2}{7}} < 7\sqrt{\frac{2}{6}}$.

**Bài 4:**

a. Ta có: $x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

b. Ta có:

$$2x^2 + 2x - 1 \geq -15 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 + 15 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 14 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 7) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + 7 - \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{27}{4} \geq 0$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

c. Ta có:

$$x^2(x^2 - 1) \geq x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

d. Ta có: $9x^2 + 6ax + a^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow (3x + a)^2 + 8 > 0$

Vậy bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

**Bài 5:**

a. Ta có: $x^2 \geq 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq -5 \end{array}\right.$ và $x^2 < 25 \Leftrightarrow -5 < x < 5.$

Do đó, không tồn tại x.

b. Ta có:

$$x^2 + 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 \geq \sqrt{6} \\ x+1 \leq -\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{6} - 1 \\ x \leq -\sqrt{6} - 1 \end{array}\right.$$

c. Ta có: $x^2 - 1 < 9 \Leftrightarrow x^2 < 10 \Leftrightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$.

d. Ta có:

$$x^2 + 6ax + 9a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 3a)^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3a)^2 > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3a > 2 \\ x + 3a < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 - 3a \\ x < -2 - 3a \end{array}\right..$$

**Bài 6:** Ta có: $\sqrt{x^2 + 3x - 4} \geq 0 \Rightarrow 8 + \sqrt{x^2 + 3x - 4} \geq 8.$

Vậy, ta được $A_{\text{nhỏ nhất}} = 8$, đạt được khi:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right..$$

**Bài 7:** Ta có: $\sqrt{x^2 + 7x + 6} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 7x + 6} \leq 0 \Rightarrow 11 - \sqrt{x^2 + 7x + 6} \leq 11.$

Vậy, $B_{\text{lớn nhất}} = 11$, đạt được khi: $\sqrt{x^2 + 7x + 6} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -6 \end{array}\right..$

**Bài 8:**

a. Ta có: $x^2 - 3x + 9 > 0 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 9} > 5$

Vậy, A không có giá trị nhỏ nhất.

b. Ta có: $\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq 0.$

Vậy, ta được $A_{\text{nhỏ nhất}} = 0$, đạt được khi:

$$x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{29}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{49}{4}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{49}{4}\right)^2 = \frac{29}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{29}}{2} + \dfrac{49}{4} \\ x = -\dfrac{\sqrt{29}}{2} + \dfrac{49}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\sqrt{29} + 49}{4} \\ x = \dfrac{-2\sqrt{29} + 49}{4} \end{array}\right..$$

c. Ta có: $\sqrt{x^2-7x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-7x+6} - 25 \geq -25$

Vậy, ta được $A_{\text{nhỏ nhất}} = -25$, đạt được khi: $x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$.

d. Ta có: $x^2 - 6x + 11 = x^2 - 2.3x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$

Vậy, ta được $A_{\text{nhỏ nhất}} = 2$, đạt được khi $(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

**Bài 9:**

a. Ta có: $\sqrt{x^2-4x+13} > 0$ (do $x^2 - 4x + 13 > 0$) $\Leftrightarrow 15 - \sqrt{x^2-4x+13} < 0$

Vậy, A không có giá trị lớn nhất.

b. Ta có:

$$-3x^2 + 6x - 15 = -3(x^2 - 2x + 3)$$
$$= -3(x-1)^2 + 3.2 = -3(x-1)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy, $B_{\text{lớn nhất}} = 6$, đạt được khi: $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

c. Ta có: $12 - \sqrt{x^2-2x+1} \leq 12$.

Vậy, $C_{\text{lớn nhất}} = 12$, đạt được khi: $\sqrt{x^2-2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

d. Ta có: $17 + 10x - x^2 = -(x-5)^2 + 48 \leq 48$

Vậy, $D_{\text{lớn nhất}} = 48$, đạt được khi: $(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

**Bài 10:**

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2x-1})^2 = 1^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+5=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+5=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2.

c. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4=x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2.

**CHỦ ĐỀ 2**

# CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA**

$\sqrt{A}$ chỉ có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.

**2. HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$**

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}.$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Vấn đề 1: PHÁ DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

**Ví dụ 1:** *Tính* $|x - 1|$.

✍ *Giải*

Ta có: $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{nếu } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$.

**Ví dụ 2:** Bỏ *dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn biểu thức:*

$$C = |x - 1| + 2|x + 2| + 3.$$

✍ *Giải*

Nhận xét rằng: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

do đó, để bỏ được dấu giá trị tuyệt đối của C ta cần xét các trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x < -2$, ta được: $C = -(x - 1) - 2(x + 2) + 3 = -3x$.

*Trường hợp 2*: Nếu $-2 \leq x \leq 1$, ta được: $C = -(x - 1) + 2(x + 2) + 3 = x + 8$.

*Trường hợp 3*: Nếu $x > 1$, ta được: $C = (x - 1) + 2(x + 2) + 3 = 3x + 6$.

### Vấn đề 2: ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA

**Ví dụ 1:** *Tìm điều kiện của* x *để* $\sqrt{-2x + 1}$ *tồn tại?*

✍ *Giải*

Để $\sqrt{-2x + 1}$ tồn tại, điều kiện là: $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Vậy, $\sqrt{-2x + 1}$ tồn tại khi và chỉ khi $x \leq \frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2:** *Tìm các giá trị của* x *để biểu thức sau có nghĩa:*

a. $A = \dfrac{1}{\sqrt{5x + 10}}$.   b. $B = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{3x^2 - 5x + 2}$.

✍ *Giải*

a. Để A có nghĩa, điều kiện là: $5x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy, với $x > -2$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa, điều kiện là: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 1; x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vậy, với $x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq 1$; $x \neq \dfrac{2}{3}$ thì B có nghĩa.

**Ví dụ 3:** *Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:*

a. $A = \sqrt{x^2 - 36}$.  b. $B = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.  c. $C = \sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$.

✍ *Giải*

a. Để A có nghĩa, điều kiện là: $x^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 6^2 \Leftrightarrow |x| \geq 6$.

Vậy, với $|x| \geq 6$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa, điều kiện là:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x-2| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $x \geq 3$ hoặc $x \leq 1$ thì B có nghĩa.

c. Để C có nghĩa, điều kiện là: $\dfrac{2-x}{x-3} \geq 0$ ta lập bảng xét dấu, dựa trên:

$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

như sau:

| x | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | + | 0 | – | \| | – |
| $x-3$ | – | \| | – | 0 | + |
| $\dfrac{2-x}{x-3}$ | – | 0 | + | \|\| | – |

Từ đó, suy ra: $\dfrac{2-x}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.

Vậy, với $2 \leq x < 3$ thì C có nghĩa.

## Vấn đề 3: SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

**Ví dụ 1:** *Tính:*

a. $\sqrt{(0{,}09)^2}$.  b. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

*Giải*

a. Ta có: $\sqrt{(0{,}09)^2} = |0{,}09| = 0{,}09$.

b. Ta có: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$, vì $2-\sqrt{3} < 0$.

**Ví dụ 2:** *Tính:*

a. $\sqrt{x^6}$.  c. $x + \sqrt{x^2-2x+1}$.

b. $\sqrt{x^2-4x+4}$  d. $x + y + \sqrt{(x-y)^2}$.

*Giải*

a. Ta có: $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } x^3 \geq 0 \\ -x^3 \text{ nếu } x^3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x^3 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$.

b. Ta có: $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

$$= \begin{cases} x-2 \text{ nếu } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \text{ nếu } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2-x \text{ nếu } x < 2 \end{cases}.$$

c. Ta có: $x + \sqrt{x^2-2x+1} = x + \sqrt{(x-1)^2} = x + |x-1|$

$$= \begin{cases} x+x-1 \text{ nếu } x-1 \geq 0 \\ x-(x-1) \text{ nếu } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 \text{ nếu } x \geq 1 \\ 1 \quad \text{ nếu } x < 1 \end{cases}.$$

d. Ta có: $x + y + \sqrt{(x-y)^2} = x + y + |x-y|$

$$= \begin{cases} x+y+x-y \text{ nếu } x-y \geq 0 \\ x+y-(x-y) \text{ nếu } x-y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq y \\ 2y \text{ nếu } x < y \end{cases}.$$

**Ví dụ 3:** *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 \text{ nếu } 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Ta có: $P = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

$$= \begin{cases} \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 \text{ nếu } \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1 \text{ nếu } \sqrt{x-1}-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } \sqrt{x-1} \geq 1 \\ 2 \text{ nếu } \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x-1 \geq 1 \\ 2 \text{ nếu } 0 \leq x-1 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 \text{ nếu } 1 \leq x < 2 \end{cases}, \text{ đpcm.}$$

**Ví dụ 4:** *Cho biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{9x^2-1}$.

a. *Tìm tập xác định của* A. b. *Rút gọn biểu thức* A.

c. *Tính giá trị của* A *tại* $x = 1$. d. *Tìm giá trị của* x *để* $A = \dfrac{1}{3}$.

e. *Tìm giá trị của* x *để* $A < 0$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện để biểu thức A có nghĩa:

$$\begin{cases} 9x^2-6x+1 \geq 0 \\ 9x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)^2 \geq 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{9x^2-1} = \frac{\sqrt{(3x-1)^2}}{9x^2-1} = \frac{|3x-1|}{(3x-1)(3x+1)}.$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} \text{ nếu } 3x-1 > 0 \\ \dfrac{-1}{3x+1} \text{ nếu } 3x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} \text{ nếu } x > \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-1}{3x+1} \text{ nếu } x < \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

c. Với $x = 1$ ta được $A = \dfrac{1}{3.1+1} = \dfrac{1}{4}$.

d. Để $A = \dfrac{1}{3}$, ta có hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu: $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} = \dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3x+1 \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}.$

*Trường hợp 2*: Nếu: $\begin{cases} \dfrac{-1}{3x+1} = \dfrac{1}{3} \\ x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3x+1 \\ x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$.

Vậy với $x = \dfrac{2}{3}$ hoặc $x = -\dfrac{4}{3}$ thì $A = \dfrac{1}{3}$.

e. Ta có:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{|3x-1|}{9x^2-1} < 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 \neq 0 \\ 9x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}.$$

Vậy với $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$ thì $A < 0$.

☛ ***Chú ý***: Ở câu này ta có thể làm cách khác nhanh hơn nhờ việc đánh giá được: $|3x-1| > 0$ (TXĐ: $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$)

Do đó (1) $\Leftrightarrow 9x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$

**Ví dụ 3**: a. *Chứng minh bất đẳng thức* $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq \sqrt{(a+b)^2}$.

b. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*:

$$A = \sqrt{(2006-x)^2} + \sqrt{(2005-x)^2}.$$

✍ *Giải*

a. Xét bất đẳng thức, vì hai vế không âm nên bình phương hai vế ta được:

$a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow 2|a.b| \geq 2ab$, luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh và dấu " = " xảy ra khi:

$a.b \geq 0$, tức là khi a và b cùng dấu.

b. Ta viết: $A = \sqrt{(2006-x)^2} + \sqrt{(x-2005)^2} \geq \sqrt{(2006-x+x-2005)^2} = 1$.

Vậy ta được $A_{Min} = 1$, đạt được khi:

$(2006-x)(2005-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2005 \leq x \leq 2006$.



ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3049

☛ ***Nhận xét***: Trong câu a), chúng ta đã sử dụng phép bình phương để khử căn, rồi từ đó nhận được bất đẳng thức đúng. Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh bằng cách biến đổi:

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq \sqrt{(a+b)^2} \Leftrightarrow |a| + |b| \geq |a+b|$$

Ta thấy ngay, bất đẳng thức trên luôn đúng (vì đã được chứng minh trong phần bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối).

## Vấn đề 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** *Tìm* x, *biết*:

a. $\sqrt{(x+1)^2} = 9$. b. $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - x$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi về dạng:

$$|x+1| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 9 \text{ nếu } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) = 9 \text{ nếu } x+1 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \text{ nếu } x \geq -1 \\ x = -10 \text{ nếu } x < -1 \end{array}\right.$$

Vậy, ta nhận được hai giá trị x = 8 và x = − 10.

b. Ta có: $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - x \Leftrightarrow |x-3| = 3 - x \Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Vậy, nghiệm của phương trình là $x \leq 3$.

☛ ***Chú ý***: Trong lời giải câu b), chúng ta đã sử dụng tính chất:

$$|a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0.$$

**Ví dụ 2:** *Tìm* x, *biết*:

a. $\sqrt{x-2} + 2 = x$. b. $\sqrt{x-1} + 1 \leq x$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện có nghĩa: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-2} = x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = (\sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(\sqrt{x-2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 0 \\ \sqrt{x-2} - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 2 và x = 3.

b. Điều kiện có nghĩa: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-1} \leq x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq (\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm x = 1 hoặc $x \geq 2$.

# C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Tìm tập xác định của các biểu thức.

a. $A = \sqrt{5x + 40}$.

b. $B = \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

c. $C = \dfrac{\sqrt{2x + 4}}{x^2 - 6x + 9}$.

d. $D = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 123}}$.

**Bài 2:** Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}}{x^2 - 3}$.

b. $B = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x - 2}}$.

c. $C = \dfrac{\sqrt{(x - 4)^2}}{x^2 - 5x + 4}$.

d. $D = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 1}}$.

**Bài 3:** Giải phương trình:

a. $\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} = 3$.

b. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 - 2x$.

c. $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1$.

d. $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 2} - 1} = \sqrt{x - 2} - 1$.

**Bài 4:** Cho biểu thức $A = 6x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị biểu thức A với $x = 5$.

c. Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 1$.

**Bài 5:** Cho biểu thức $A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị biểu thức A với $x = -1$.

c. Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 0$.

**Bài 6:** Tìm x, biết:

a. $\sqrt{2x - 1} + 1 = 2x$.

b. $\sqrt{3x - 2} + 4 \le 6x$.

**Bài 7:** Giải phương trình:

a. $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2$.

b. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2 - x} = 0$.

**Bài 8:** Giải phương trình:

a. $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 1$.

b. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x + 5$.

**Bài 9:** Giải phương trình:

a. $5\sqrt{x - 2} = x + 2$.

b. $3\sqrt{2x - 1} = 2x - 5$.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. Để A có nghĩa $5x + 40 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -8$. Vậy, TXĐ: $x \ge -8$.

b. Để B có nghĩa: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Vậy, TXĐ: $|x| > 2$.

c. Để C có nghĩa: $\begin{cases} 2x + 4 \ge 0 \\ x^2 - 6x + 9 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \ne 3$.

Vậy, TXĐ: $-2 \le x \ne 3$.

d. Để D có nghĩa $x^2 + 123 \ne 0, \forall x$

Vậy, TXĐ: $x \in \mathbf{R}$.

**Bài 2:**

a. TXĐ: $x^2 - 3 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \pm\sqrt{3}$.

Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}}{x^2 - 3} = \dfrac{\sqrt{(x+\sqrt{3})^2}}{x^2 - 3} = \dfrac{|x + \sqrt{3}|}{x^2 - 3}$.

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x + \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{3}$.

$$\text{Ta được: } A = \frac{x + \sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = \frac{1}{x - \sqrt{3}}.$$

*Trường hợp 2*: Nếu $x + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3}$.

$$\text{Ta được: } A = \frac{-(x + \sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = -\frac{1}{x - \sqrt{3}}.$$

b. TXĐ $x \ge 2$.

Ta có: $B = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x - 2}} = \dfrac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x - 3}$.

c. TXĐ: $x^2 - 5x + 4 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1, x \ne 4$.

Ta có: $C = \dfrac{\sqrt{(x-4)^2}}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{\sqrt{(x-4)^2}}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{|x-4|}{(x-1)(x-4)}$.

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

$$\text{Ta được: } C = \frac{x - 4}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{x - 1}.$$

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$.

$$\text{Ta được: } C = \frac{-(x - 4)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-1}{x - 1}.$$

d. TXĐ:

$\forall x \in \mathbf{R}\backslash\{-1/3\}$ (do $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 \geq 0$).

Ta có: $D = \dfrac{3x+1}{\sqrt{9x^2+6x+1}} = \dfrac{3x+1}{\sqrt{(3x+1)^2}} = \dfrac{3x+1}{|3x+1|}$.

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$.

Ta được: $D = \dfrac{3x+1}{3x+1} = 1$.

*Trường hợp 2*: Nếu $3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{3}$.

Ta được: $D = \dfrac{3x+1}{-(3x+1)} = -1$.

**Bài 3:**

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} = 3 \Leftrightarrow |\sqrt{x} + 1| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 1-2x \Leftrightarrow |2x-1| = 1 - 2x \Leftrightarrow 1 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \geq \dfrac{1}{2}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \geq 1$.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1} = \sqrt{x-2}-1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} = \sqrt{x-2}-1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}-1| = \sqrt{x-2}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \geq 3$.

**Bài 4:**

a. Điều kiện $\forall x \in \mathbf{R}$ do $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Ta có: $A = 6x - 1 + \sqrt{x^2-4x+4} = 6x - 1 + \sqrt{(x-2)^2} = 6x - 1 + |x - 2| =$

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ta được: $A = 6x - 1 + x - 2 = 7x - 3$.

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Ta được: $A = 6x - 1 - (x - 2) = 5x + 1$.

b. Với $x = 5$, ta có: $A = 7 . 5 - 3 = 32$.

c. Để A = 1, ta có:

*Trường hợp 1*: Với $x \geq 2$ thì $7x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$, không thoả mãn.

*Trường hợp 2*: Với $x < 2$ thì $5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, thoả mãn.

Vậy, x = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Bài 5:**

a. Điều kiện: $x^2 - 6x + 9 \geq 0$, luôn đúng.

Ta có: $A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 8 - \sqrt{(x-3)^2} = x + 8 - |x - 3|$

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Ta được: $A = x + 8 - (x - 3) = 11$.

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Ta được: $A = x + 8 - (3 - x) = 2x + 5$.

b. Với x = 3, ta được A = 11.

c. Để A = 0 với x < 3, ta có: $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

Vậy, $x = -\frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Bài 6:**

a. Điều kiện có nghĩa: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x-1} = 2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = (\sqrt{2x-1})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}(\sqrt{x-2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1} = 0\\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x - 1 = 0\\ \sqrt{2x-1} = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\\ x = 1\end{array}\right.$$, thoả mãn (*).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$ và x = 1.

b. Điều kiện có nghĩa: $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{3x-2} \leq 2(3x-2) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} \leq 2(\sqrt{3x-2})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}(2\sqrt{3x-2} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3x-2} = 0\\ 2\sqrt{3x-2} - 1 \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x - 2 = 0\\ \sqrt{3x-2} \geq \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{2}{3}\\ x \geq 3/4\end{array}\right.$$, thoả mãn (*).

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3}$ hoặc $x \geq \frac{3}{4}$.

**Bài 7:**

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.*

Điều kiện: $\forall x \in \mathbf{R}$ do $x^2 - 5x + 8 = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \ge 0$.

Ta có: $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 1 và x = 4.

*Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.*

$$x^2 - 5x + 8 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 1 và x = 4.

b. Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ 2 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

Ta có: $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

*Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.*

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x + 1 = 2 - x \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x + 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = 1/2 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

**Bài 8:**

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.*

Điều kiện $\forall x \in \mathbf{R}$ do: $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \ge 0$.

Ta có: $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = (x + 1)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm x = 0.

*Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.*

$$\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x^2 - x + 1 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm x = 0.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.*

Điều kiện $\forall x \in \mathbf{R}$ do $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 0$.

Ta có: $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = (x+5)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 10x + 25 \Leftrightarrow 12x = -22 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = -\frac{11}{6}$.

*Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.*

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 3 = (x+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 12x = -22 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = -\frac{11}{6}$.

**Bài 9:** Đề nghị các em học sinh giải theo hai cách đã biết:

*Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.*

*Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.*

Ở đây trình bày theo cách đặt ẩn phụ để các em làm quen.

a. Điều kiện có nghĩa: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x - 2 - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2})^2 - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x-2}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{x-2} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 18 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$ và $x = 18$.

b. Điều kiện có nghĩa: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2x - 1 - 3\sqrt{2x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^2 - 3\sqrt{2x-1} - 4 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{(loại)} \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{17}{2}$.

**CHỦ ĐỀ 3**

# LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐỊNH LÍ**

Với $A \geq 0$, $B \geq 0$ thì $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$.

**2. KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH**

***Quy tắc khai phương một tích***: Muốn khai phương một tích các biểu thức không âm, ta có thể khai phương từng biểu thức rồi nhân kết quả với nhau.

**3. NHÂN CÁC CĂN THỨC BẬC HAI**

***Quy tắc nhân các căn thức bậc hai***: Muốn nhân các căn thức bậc hai của các biểu thức không âm ta có thể nhân các biểu thức dưới dấu căn với nhau rồi lấy căn bậc hai của kết quả đó.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Sử dụng quy tắc khai phương một tích, tính:*

a. $\sqrt{25.49}$. b. $\sqrt{9.16.36}$. c. $\sqrt{27.48}$. d. $\sqrt{81a^2}$.

*Giải*

a. Ta có ngay: $\sqrt{25.49} = \sqrt{25}.\sqrt{49} = 5.7 = 35$.

b. Ta có ngay: $\sqrt{9.16.36} = \sqrt{9}.\sqrt{16}.\sqrt{36} = 3.4.6 = 72$.

c. Ta viết lại: $\sqrt{27.48} = \sqrt{27.3.16} = \sqrt{81.16} = 9.4 = 36$.

d. Ta có ngay: $\sqrt{81a^2} = \sqrt{81}.\sqrt{a^2} = 9.|a|$.

***Nhận xét***: Trong câu c), nếu chúng ta vận dụng một cách máy móc quy tắc khai phương một tích sẽ không nhận được kết quả gọn.

**Ví dụ 2:** *Sử dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, tính:*

a. $\sqrt{2}.\sqrt{18}$.

b. $\sqrt{1,1}.\sqrt{44}.\sqrt{10}$.

c. $\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

d. $\sqrt{27a}.\sqrt{3a}$, với $a > 0$.

*Giải*

a. Ta có: $\sqrt{2}.\sqrt{18} = \sqrt{2.18} = \sqrt{36} = 6$.

b. Ta có: $\sqrt{1,1}.\sqrt{44}.\sqrt{10} = \sqrt{1,1.44.10} = \sqrt{11.11.4} = 22$.

c. Ta có: $\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1$.

d. Ta có: $\sqrt{27a}.\sqrt{3a} = \sqrt{81a^2} = 9|a| = 9a$, do $a > 0$.

***Nhận xét***: Trong câu c), chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

**Ví dụ 3:** *Rút gọn các biểu thức sau:*

a. $\sqrt{a^4(3-a)^2}$, với $a \geq 3$.

b. $\frac{1}{a-b}.\sqrt{a^6(a-b)^2}$, với $a < b < 0$.

*Giải*

a. Ta có: $\sqrt{a^4(3-a)^2} = \sqrt{a^4}.\sqrt{(3-a)^2} = a^2.|3-a| \overset{a\geq 3}{=} a^2(a-3)$.

b. Ta có:

$$\frac{1}{a-b}.\sqrt{a^6(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}.\sqrt{a^6}.\sqrt{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}.|a^3|.|a-b|$$

$$\overset{a<b<0}{=} \frac{1}{a-b}.(-a^3).(b-a) = a^3.$$

**Ví dụ 4:** *Thực hiện phép tính:*

a. $A = (\sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{2})\sqrt{2}$.

b. $B = (\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2$.

c. $C = (3\sqrt{5} + \sqrt{2})(3\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

*Giải*

a. Ta có:

$$A = \sqrt{8}.\sqrt{2} + \sqrt{72}.\sqrt{2} - \sqrt{2}.\sqrt{2} = \sqrt{16} + \sqrt{144} - 2 = 4 + 12 - 2 = 14.$$

b. Ta có:

$$B = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 - 2\sqrt{4+\sqrt{7}}.\sqrt{4-\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$$

$$= 4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{16-7}$$

$$= 8 - 2.3 = 2.$$

c. Ta có: $C = (3\sqrt{5})^2 - 2 = 45 - 2 = 43$.

**Nhận xét**: Như vậy, trong câu c), bằng việc sử dụng hằng đẳng thức chúng ta đã giảm được đáng kể độ phức tạp.

**Ví dụ 5:** a. *So sánh* $\sqrt{16+4}$ *với* $\sqrt{16} + \sqrt{4}$.

b. *Chứng minh rằng* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, *với mọi* a, b *dương*.

*Giải*

a. Nhận xét rằng: $(\sqrt{16+4})^2 = 20$ và $(\sqrt{16} + \sqrt{4})^2 = (4+2)^2 = 36$

suy ra: $(\sqrt{16+4})^2 < (\sqrt{16} + \sqrt{4})^2 \Rightarrow \sqrt{16+4} < \sqrt{16} + \sqrt{4}$.

b. Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:

$(\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a + b \leq a + b + 2\sqrt{a.b} \Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{a.b}$, đúng.

☞ *Nhận xét*: Cách đặt vấn đề của ví dụ trên, giúp chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức trước khi đi chứng minh nó. Tuy nhiên, nếu đặt vấn đề theo kiểu ngược lại, chúng ta sẽ được quyền sử dụng bất đẳng thức này để đưa ra đánh giá cho phép so sánh.

**Ví dụ 6:** a. *Chứng minh bất đẳng thức:*

$|ac + bd| \le \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$ (*Bất đẳng thức Bunhiacôpxki*)

b. *Biết* $x^2 + y^2 = 52$. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:* $A = 3x + 2y$.

✍ *Giải*

a. Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:

$(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd \le a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$

$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2d^2 - 2acbd \ge 0 \Leftrightarrow (bc - ad)^2 \ge 0$, luôn đúng.

Dấu " = " xảy ra khi: $bc = ad \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

b. Nhận xét rằng:

$|A| = |3x + 2y| \le \sqrt{(3^2 + 2^2)(x^2 + y^2)} = \sqrt{13.52} = 26 \Leftrightarrow -26 \le A \le 26$.

Dấu " = " xảy ra khi: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = t \Leftrightarrow x = 3t$ và $y = 2t$ do đó:

$$52 = x^2 + y^2 = (3t)^2 + (2t)^2 = 13t^2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ và } y = 4 \\ x = -6 \text{ và } y = -4 \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- $A_{Max} = 26$, đạt được khi $x = 6$ và $y = 4$.
- $A_{Min} = -26$, đạt được khi $x = -6$ và $y = -4$.

**Ví dụ 7:** *Cho biểu thức:* $A = \frac{2x^2 - ax - 3a^2}{2x^2 - 5ax + 3a^2}$.

a. *Rút gọn biểu thức* A.

b. *Chứng minh rằng* $A = (a + \sqrt{a^2 + 1})^2$ *khi* $x = \sqrt{a^2 + 1}$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$A = \frac{2x^2 - ax - 3a^2}{2x^2 - 5ax + 3a^2} = \frac{2x^2 + 2ax - 3ax - 3a^2}{2x^2 - 2ax - 3ax + 3a^2}$$

$$= \frac{2x(x + a) - 3a(x + a)}{2x(x - a) - 3a(x - a)} = \frac{(x + a)(2x - 3a)}{(2x - 3a)(x - a)} = \frac{x + a}{x - a}.$$

b. Thay $x = \sqrt{a^2+1}$ vào $A = \frac{x+a}{x-a}$.

Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}-a} = \frac{(\sqrt{a^2+1}+a)(\sqrt{a^2+1}+a)}{(\sqrt{a^2+1})^2-a^2} = \frac{(\sqrt{a^2+1}+a)^2}{a^2+1-a^2}$$

$= (a + \sqrt{a^2+1})^2$ (đpcm).

**Ví dụ 8:** *Cho biểu thức:* $A = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b}$.

a. *Rút gọn biểu thức* A.

b. *Tính giá trị của* A, *biết* $a - b = 1$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng: $a\sqrt{a}+b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})$ do đó, biểu thức A, được biến đổi như sau:

$$A = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b}-1)}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$$

b. Với $a - b = 1$, ta suy ra $A = 1$.

**Ví dụ 9:** *Cho hai biểu thức:* $A = \sqrt{x^2-3x+2}$ *và* $B = \sqrt{x-1}.\sqrt{x-2}$.

a. *Tìm* x *để* A *có nghĩa.*

b. *Tìm* x *để* B *có nghĩa.*

c. *Với giá trị nào của* x *thì* A = B?

d. *Với giá trị nào của* x *thì chỉ* A *có nghĩa, còn* B *không có nghĩa?*

✍ *Giải*

a. Viết lại A dưới dạng: $A = \sqrt{(x-1)(x-2)}$.

Để A có nghĩa điều kiện là $(x-1)(x-2) \ge 0$ ta lập bảng xét dấu, dựa trên:

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

như sau:

| x | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| x − 1 | − | 0 | + | \| | + |
| x − 2 | − | \| | − | 0 | + |
| (x−1)(x−2) | + | 0 | − | 0 | + |

Từ đó, suy ra: $(x-1)(x-2) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1$ hoặc $x \ge 2$.

Vậy, với $x \le 1$ hoặc $x \ge 2$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Vậy, với $x \geq 2$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{x-1}.\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy, với $x \geq 2$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

**Ví dụ 10:** *Cho* a, b, c *và* a', b', c' *là số đo các cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng. Chứng minh rằng*:

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}.$$

*Giải*

Giả sử hai tam giác đồng dạng với tỉ số k, suy ra:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \Leftrightarrow a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc.$$

Khi đó, ta biến đổi được đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sqrt{ka^2} + \sqrt{kb^2} + \sqrt{kc^2} = \sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} = \sqrt{k(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k}(a+b+c) = \sqrt{k}(a+b+c), \text{ luôn đúng.}$$

***Nhận xét***:

1. Như vậy, trong lời giải trên để chứng minh đẳng thức chúng ta đã sử dụng cách "*Biến đổi tương đương đẳng thức về một đẳng thức đúng*". Tuy nhiên, ta cũng có thể sử dụng cách biến đổi một vế thành vế còn lại, cụ thể:

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{ka^2} + \sqrt{kb^2} + \sqrt{kc^2}$$
$$= a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} = \sqrt{k}(a+b+c)$$
$$= \sqrt{k(a+b+c)^2} = \sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)}$$
$$= \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')} \text{ (đpcm).}$$

2. Qua cách biến đổi trên, chúng ta thấy ngay rằng việc sử dụng quy tắc khai phương một tích có thể giúp làm xuất hiện nhân tử chung trong một biểu thức. Nhận định này sẽ giúp chúng ta trong việc biến đổi biểu thức về dạng tích và được sử dụng nhiều trong dạng toán "*Giải phương trình chứa căn bậc hai* ".

**Ví dụ 11:** *Giải phương trình* $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}=0$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 9 \\ x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-3}.\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}\,(\sqrt{x+3}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3}=0 \\ \sqrt{x+3}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2\,(\text{loại}) \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

☛ ***Nhận xét***: Như chúng ta đã biết, phương trình trên còn có thể được giải bằng phương pháp biến đổi tương đương, cụ thể:

$$\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ x^2-9=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ (x-3)(x+3)=x-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ (x-3)(x+3-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x=3 \text{ hoặc } x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Tính:

a. $\sqrt{49.100}$. b. $\sqrt{2^4.(-9)^2}$. c. $\sqrt{72.32}$. d. $\sqrt{12,1.490}$.

**Bài 2:** Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\sqrt{27.48(a-3)^2}$. b. $\sqrt{48.75a^2}$.

**Bài 3:** Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\sqrt{a}.\sqrt{\frac{9}{a}}$, với a > 0. b. $\sqrt{8a^2}.\sqrt{18a^4}$, với a < 0.

**Bài 4:** Thực hiện phép tính:

a. $A=\sqrt{72}.\sqrt{18}$.

b. $B=\sqrt{\frac{25}{7}}.\sqrt{\frac{7}{16}}$.

c. $C=\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$.

**Bài 5:** Thực hiện phép tính:

a. $A=(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)$. b. $B=(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})$.

c. $C=(\sqrt{4-\sqrt{3}}-\sqrt{4+\sqrt{3}})^2$.

**Bài 6:** Chứng minh các đẳng thức:

a. $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{5}}$. b. $\sqrt{5}+2=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

**Bài 7:** Cho a > 0. Chứng minh rằng: $\sqrt{a}+1 > \sqrt{a+1}$.

**Bài 8:** Cho a ≥ 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$.

**Bài 9:** Chứng minh rằng: $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

**Bài 10:** Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = x^2 + 2x + 16$ với $x = \sqrt{2} - 1$.

b. $B = x^2 + 12x - 14$ với $x = 5\sqrt{2} - 6$.

**Bài 11:** Cho hai biểu thức: $A = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ và $B = \sqrt{x-1}.\sqrt{2x-1}$.

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Tìm x để B có nghĩa.

c. Với giá trị nào của x thì A = B?

d. Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa?

**Bài 12:** Biết $x^2 + y^2 = 117$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x + 3y$.

**Bài 13:** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là một nửa chu vi. Chứng minh rằng: $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$.

**Bài 14:** Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3x+2}{\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2}$.

b. $\sqrt{4x^2-1} - 2\sqrt{2x+1} = 0$.

**Bài 15:** Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4x-8} - \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{25x-50}{4}} = 4$.

b. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. 70. b. 36 c. 48. d. 77.

**Bài 2:**

a. $36|a-3|$. b. $60|a|$.

**Bài 3:**

a. Ta biến đổi: $\sqrt{a}.\sqrt{\dfrac{9}{a}} = \sqrt{a.\dfrac{9}{a}} = \sqrt{9} = 3$.

b. Ta biến đổi: $\sqrt{8a^2}.\sqrt{18a^4} = \sqrt{8a^2.18a^4} = \sqrt{144.a^6} = 12.|a^3| \overset{a<0}{=} -12a^3$.

**Bài 4:**

a. Ta có: $A = \sqrt{72}.\sqrt{18} = \sqrt{8.9.2.9} = \sqrt{4.4.9.9} = 4.9 = 36$.

b. Ta có: $B = \sqrt{\dfrac{25}{7}}.\sqrt{\dfrac{7}{16}} = \sqrt{\dfrac{25}{7}.\dfrac{7}{16}} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$.

c. Ta có: $C = \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}.\sqrt{2}$

$$= \sqrt{\frac{9.2}{2}} + \sqrt{\frac{3.2}{2}} - \sqrt{2.2} = \sqrt{9} + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}.$$

**Bài 5:**

a. Ta có:

$A = (\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5}.\sqrt{5} + \sqrt{5}.\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1$

$= 5 + \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1 = 4 + \sqrt{10} - \sqrt{2}$.

b. Ta có:

$B = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}) = (\sqrt{2} + 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 3$

$= 2\sqrt{2}$.

c. Ta có:

$C = (\sqrt{4-\sqrt{3}} - \sqrt{4+\sqrt{3}})^2 = 4 - \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} - 2\sqrt{4-\sqrt{3}}\sqrt{4+\sqrt{3}}$

$= 8 - 2\sqrt{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} = 8 - \sqrt{16-3} = 8 - \sqrt{13}$.

**Bài 6:**

a. Ta có: $VT = \sqrt{8+2\sqrt{5}} = \sqrt{3+5+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{5} = VP$

b. Ta có: $VT = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{4+5+2.2\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} + 2 = VP$.

**Bài 7:** Với $a > 0$, ta có: $(\sqrt{a} + 1)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1$; $(\sqrt{a+1})^2 = a + 1$.

Nhận thấy: $a + 1 + 2\sqrt{a} > a + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 > (\sqrt{a+1})^2$.

Vậy, ta được $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{a+1}$.

**Bài 8:** Với $a \geq 1$, ta có: $(\sqrt{a-1})^2 = a - 1$; $(\sqrt{a})^2 = a$.

Nhận thấy: $a > a - 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a-1})^2 < (\sqrt{a})^2$.

Vậy, ta được $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$.

**Bài 9:** Ta có:

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 + 2 - 2.\sqrt{3}.\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{6}$;

$(\sqrt{6} - 1)^2 = 1 + 6 - 2.\sqrt{6} = 7 - 2\sqrt{6}$.

Dễ thấy, $5 - 2\sqrt{6} < 7 - 2\sqrt{6}$. Vậy, ta được $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

**Bài 10:**

a. Thay $x = \sqrt{2} - 1$ vào A, ta được:

$A = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) + 16 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 + 16 = 17$.

b. Thay $x = 5\sqrt{2} - 6$ vào B, ta được:

$B = (5\sqrt{2} - 6)^2 + 12(5\sqrt{2} - 6) - 14 = 50 - 60\sqrt{2} + 36 + 60\sqrt{2} - 72 - 14 = 0$.

**Bài 11:**

a. Viết lại A dưới dạng: $A = \sqrt{(x-1)(2x-1)}$.

Để A có nghĩa điều kiện là: $(x - 1)(2x - 1) \geq 0$ ta lập bảng xét dấu, dựa trên:

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

như sau:

| x | | 1/2 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| x − 1 | − | \| | − | 0 | + |
| 2x − 1 | − | 0 | + | \| | + |
| (x−1)(x−2) | + | 0 | − | 0 | + |

Từ đó, suy ra: $(x - 1)(2x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$.

Vậy, với $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Vậy, với $x \geq 1$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là:

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x-1}.\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, với $x \geq 1$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq \frac{1}{2}$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

**Bài 12:** Nhận xét rằng:

$$|A| = |2x + 3y| \leq \sqrt{(2^2 + 3^2)(x^2 + y^2)} = \sqrt{13.117} = 39 \Leftrightarrow -39 \leq A \leq 39.$$

Dấu " = " xảy ra khi: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = t \Leftrightarrow x = 2t$ và $y = 3t$ do đó:

$$117 = x^2 + y^2 = (2t)^2 + (3t)^2 = 13t^2 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ và } y = 9 \\ x = -6 \text{ và } y = -9 \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- $A_{Max} = 39$, đạt được khi $x = 6$ và $y = 9$.
- $A_{Min} = -39$, đạt được khi $x = -6$ và $y = -9$.

**Bài 13:**

- Ta có:

$$(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2$$
$$= (1.\sqrt{p-a} + 1.\sqrt{p-b} + 1.\sqrt{p-c})^2$$
$$\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(p - a + p - b + p - c) = 3p$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$

- Ta đi chứng minh $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$ bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể: $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

$$\Leftrightarrow p < p - a + p - b + p - c + $$
$$+ 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$
$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

**Bài 14:**

a. Điều kiện: $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3x + 2 = 2(\sqrt{x+2})^2 \Leftrightarrow 3x + 2 = 2(x + 2) \Leftrightarrow x = 2, \text{ thoả mãn } (*)$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

b. Điều kiện: $\begin{cases} 4x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 1/4 \\ x \ge -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1/2 \\ x = -1/2 \end{array}\right.$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(\sqrt{2x-1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = 0 \\ \sqrt{2x-1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x + 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = \frac{5}{2}$.

**Bài 15:**

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4(x-2)} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{4}(x-2)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 6$.

b. Điều kiện: $\begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \\ 1 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}$.

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

**CHỦ ĐỀ 4** LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐỊNH LÍ**

Với A ≥ 0, B > 0 thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

**2. KHAI PHƯƠNG MỘT THƯƠNG**

***Quy tắc khai phương một thương***: Muốn khai phương một thương $\dfrac{A}{B}$ của hai biểu thức A ≥ 0, B > 0, ta có thể khai phương lần lượt biểu thức bị chia A và biểu thức chia B. Sau đó lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

**3. CHIA HAI CĂN THỨC BẬC HAI**

***Quy tắc chia hai căn thức bậc hai***: Muốn chia căn thức bậc hai của biểu thức không âm A cho căn thức bậc hai của biểu thức dương B, ta có thể chia biểu thức A cho biểu thức B rồi lấy căn bậc hai của thương đó.

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Thực hiện phép tính:*

a. $A = \sqrt{72} : \sqrt{2}$.  b. $B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$.

c. $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$.

*Giải*

a. Ta có ngay $A = \sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{72 : 2} = \sqrt{36} = 6$.

b. Ta có ngay:

$B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{12 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3} = \sqrt{4} - \sqrt{9} + 1 = 0$.

c. Ta viết C dưới dạng:

$$C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{3}.\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

***Nhận xét***:

1. Trong các câu a) và b), chúng ta thực hiện phép bằng bằng việc sử dụng ngay quy tắc chia hai căn thức bậc hai. Tuy nhiên, câu b) có thể thực hiện theo cách biến đổi:

$\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} - \sqrt{9}.\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow B = 0$.

2. Trong câu c), chúng ta thực hiện tách $\sqrt{15} = \sqrt{3}.\sqrt{5}$. Tuy nhiên, cũng có thể thực hiện như sau:

$$C = (\sqrt{5^2.3} + \sqrt{3^2.5}) : \sqrt{15} = \sqrt{\frac{5^2.3}{15}} + \sqrt{\frac{3^2.5}{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

**Ví dụ 2:** *Rút gọn biểu thức:*

a. $A = \dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}}$.     b. $B = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$.

*Giải*

a. Ta có ngay:

$$A = \frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4-2.2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}}{2-\sqrt{5}} = \frac{|2-\sqrt{5}|}{2-\sqrt{5}} = -1.$$

b. Ta có ngay:

$$B = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

***Chú ý:***

1. Trong lời giải câu a), các em học sinh cần chú ý tới dấu của $2-\sqrt{5} < 0$ để xác định được đúng giá trị cho A.
2. Trong lời giải câu b), bằng việc nhân cả tử và mẫu với 2 chúng ta đạt được hai mục đích:
   - Mẫu số trở thành số chính phương.
   - Tử số được biến đổi về dạng bình phương một nhị thức.

**Ví dụ 3:** *Rút gọn các biểu thức:*

a. $A = \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}.\sqrt{\dfrac{a^6}{b^3}}$, với $b > 0$.     b. $B = b^5\sqrt{\dfrac{a^2+6a+9}{b^8}}$.

*Giải*

a. Trước hết ta sử dụng quy tắc nhân hai căn bậc hai, rồi biến đổi tiếp:

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{b}}.\sqrt{\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^8}{b^4}} = \frac{a^4}{b^2}.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = b^5\sqrt{\frac{(a+3)^2}{b^8}} = b^5.\frac{|a+3|}{b^4} = b.|a+3|$$

$$= \begin{cases} b(a+3) \text{ nếu } a+3 \ge 0 \\ -b(a+3) \text{ nếu } a+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} b(a+3) \text{ nếu } a \ge -3 \\ -b(a+3) \text{ nếu } a < -3 \end{cases}.$$

☛ *Nhận xét*: Như vậy, trong câu a) nếu chúng ta vận dụng quy tắc khai phương một thương một cách máy móc sẽ không nhận được kết quả gọn.

**Ví dụ 4:** *Rút gọn các biểu thức:*

a. $A = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

b. $B = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $A = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$= (\sqrt{a}-\sqrt{b}) - (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = 0.$

b. Ta có:

$$B = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})-y(\sqrt{y}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

☛ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải câu a), chúng ta đã lựa chọn cách đơn giản từng biểu thức, dựa trên việc phân tích tử số thành các hằng đẳng thức. Tất nhiên, biểu thức cũng có thể được đơn giản bằng việc quy đồng mẫu số, xong cách giải này hẳn phức tạp hơn.
2. Trong lời giải câu b), chúng ta đánh giá được tử số là một hằng đẳng thức, tuy nhiên mẫu số không phải là hằng đẳng thức, do đó chúng ta sử dụng phương pháp nhóm số hạng để phân tích nó thành tích.

**Ví dụ 5:** a. *So sánh* $\sqrt{25-16}$ *với* $\sqrt{25}-\sqrt{16}$.

b. *Chứng minh rằng với* $a > b > 0$ *luôn có:* $\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}$.

✍ *Giải*

a. Ta nhận thấy: $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16} = 5-4 = 1$

$\Rightarrow \sqrt{25-16} > \sqrt{25}-\sqrt{16}$.

b. Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:

$(\sqrt{a-b})^2 > (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a-b > a+b-2\sqrt{a.b}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a.b} > 2b \Leftrightarrow \sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0$, luôn đúng với $a > b > 0$.

☛ ***Nhận xét***: Cách đặt vấn đề của ví dụ trên, giúp chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức trước khi đi chứng minh nó. Tuy nhiên, nếu đặt vấn đề theo kiểu ngược lại, chúng ta sẽ được quyền sử dụng bất đẳng thức này để đưa ra đánh giá cho phép so sánh.

**Ví dụ 6:** *Cho biểu thức:* $A = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$.

a. *Tìm điều kiện để biểu thức A có nghĩa.*

b. *Rút gọn biểu thức.*

c. *Tính giá trị của biểu thức A khi* $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện để biểu thức A có nghĩa: $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Vậy, tập xác định của A là x > 1.

b. Ta có:

$$A = \frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} + \frac{|x|(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x} + x = -2\sqrt{x-1} + x = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1}-1)^2.$$

c. Trước hết, ta đi đơn giản biểu thức giá trị của x, bằng cách:

$$x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{(9-2\sqrt{7})(9+2\sqrt{7})} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{81-28} = 9+2\sqrt{7}.$$

Khi đó:

$$A = (\sqrt{9+2\sqrt{7}-1}-1)^2 = (\sqrt{8+2\sqrt{7}}-1)^2$$

$$= (\sqrt{7+2\sqrt{7}+1}-1)^2 = [\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}-1]^2 = (\sqrt{7}+1-1)^2 = 7.$$

Vậy, với $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$ thì A = 7.

☛ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải câu b), ở bước biến đổi thứ hai, ta bỏ được dấu trị tuyệt đối do điều kiện x > 1 đã xác định ở câu a).
2. Trong lời giải câu c), để nhận được kết quả A = 7, chúng ta đã phải thực hiện hai công việc:
   - *Đơn giản biểu thức giá trị của x*, bằng cách nhân cả tử và mẫu với $9 + 2\sqrt{7}$. Bản chất của việc làm này được gọi là "*Phép nhân liên hợp*" và chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ trong chủ đề sau.

- *Đơn giản biểu thức giá trị của A,* bằng cách tách $8 + 2\sqrt{7}$ thành $7 + 2\sqrt{7} + 1$ để nhận được một nhị thức bình phương, từ đó khử được căn thức.

**Ví dụ 7:** *Cho hai biểu thức:* $A = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$.

a. *Tìm x để* A *có nghĩa.*

b. *Tìm* x *để B có nghĩa.*

c. *Với giá trị nào của* x *thì* A = B?

d. *Với giá trị nào của* x *thì chỉ* A *có nghĩa, còn* B *không có nghĩa?*

*Giải*

a. Để A có nghĩa điều kiện là $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0$

ta lập bảng xét dấu, dựa trên: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ như sau:

| x | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| x − 1 | − | 0 | + | \| | + |
| x − 3 | − | \| | − | 0 | + |
| $\dfrac{x-1}{x-3}$ | + | 0 | − | \|\| | + |

Từ đó, suy ra: $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ hoặc $x > 3$.

Vậy, với $x \leq 1$ hoặc $x > 3$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Vậy, với $x > 3$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Vậy, với $x > 3$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt{72} : \sqrt{18}$.

b. $B = \sqrt{52} : \sqrt{117}$.

c. $C = \left(\sqrt{\dfrac{2}{5}} - \sqrt{\dfrac{18}{5}} + 2\sqrt{5}\right).\sqrt{5}$.

**Bài 2:** Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

b. $B = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+\sqrt{24}}$.

c. $C = \dfrac{1-\sqrt{a^3}}{a-1}$.

d. $D = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$.

e. $E = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

f. $F = \dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$.

**Bài 3:** Rút gọn các biểu thức:

a. $A = 3.\sqrt{\dfrac{12(a-2)^2}{27}}$.

b. $B = (a-b).\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}}$.

**Bài 4:** Cho biểu thức $A = x^2 - x\sqrt{10}$. Tính giá trị biểu thức A với $x = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

**Bài 5:** Cho biểu thức: $A = \left[\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-1\right)\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}+1\right)\right] : \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Cho b = 1, tìm a để biểu thức A = 2.

**Bài 6:** Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A = \dfrac{1}{5}$.

**Bài 7:** Cho hai biểu thức: $A = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-3}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}}$.

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Tìm x để B có nghĩa.

c. Với giá trị nào của x thì A = B?

d. Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa?

**Bài 8:** Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} + \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Rút gọn biểu thức A.

c. Tính giá trị của biểu thức với $x = 19 - 8\sqrt{3}$.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. Ta có: $A = \sqrt{72} : \sqrt{18} = \sqrt{72:18} = \sqrt{4} = 2.$

b. Ta có: $B = \sqrt{52} : \sqrt{117} = \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{52:13}{117:13}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$

c. Ta có: $C = \left(\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{18}{5}} + 2\sqrt{5}\right)\sqrt{5} = \sqrt{\frac{2.5}{5}} - \sqrt{\frac{18.5}{5}} + 2\sqrt{5.5} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2 = 2 - 2\sqrt{2}.$

**Bài 2:**

a. Ta có: $A = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$

b. Ta có: $B = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

c. Ta có: $C = \frac{1-\sqrt{a^3}}{a-1} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{-(\sqrt{a}-1)(1+\sqrt{a}+a)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{-(1+\sqrt{a}+a)}{\sqrt{a}+1}.$

d. Ta có: $D = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$

e. Ta có: $E = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{6}+3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 1.$

f. Ta có: $F = \frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3-2.2\sqrt{3}+4}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{\sqrt{3}-2} = \frac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}-2} = -1.$

**Bài 3:**

a. Ta biến đổi: $A = 3.\sqrt{\frac{4(a-2)^2}{9}} = 3.\frac{2|a-2|}{3} = 2|a-2|$

$$= \begin{cases} 2(a-2) \text{ nếu } a-2 \geq 0 \\ -2(a-2) \text{ nếu } a-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(a-2) \text{ nếu } a \geq 2 \\ -2(a-2) \text{ nếu } a < 2 \end{cases}.$$

b. Ta biến đổi: $B = (a-b).\frac{\sqrt{ab}}{|a-b|} = \begin{cases} \sqrt{ab} \text{ nếu } a-b > 0 \\ -\sqrt{ab} \text{ nếu } a-b < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{ab} \text{ nếu } a > b \\ -\sqrt{ab} \text{ nếu } a < b \end{cases}.$

**Bài 4:** Thay $x = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ vào A, ta được $A = \frac{21}{10}.$

**Bài 5:**

a. Ta có: $A = \left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{\dfrac{b}{a}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} + \sqrt{\dfrac{a}{b}} - 1\right) : \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$

$$= \left(\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right).\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

b. Với b = 1 được A = 2, vậy:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{a+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2(a+1) \Leftrightarrow 2a - \sqrt{a} + 2 = 0. \qquad (1)$$

Ta thấy: $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2}\ \sqrt{a})^2 - 2.\sqrt{2}.\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ \sqrt{a} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{17}{8} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2a} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{17}{8} \geq \frac{17}{8} > 0$$

Do đó, (1) không thoả mãn.

Vậy, không có giá trị nào của a để với b = 1 thì A = 2.

**Bài 6:**

a. Ta có: $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(x-1)+(x-1)}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right) : \frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}.(\sqrt{x}+1) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

b. Ta có:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Vậy, với $x = \dfrac{9}{4}$ thì $A = \dfrac{1}{5}$.

**Bài 7:**

a. Để A có nghĩa điều kiện là: $\dfrac{x-1}{2x-3} \geq 0$ ta lập bảng xét dấu, dựa trên:

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ như sau:

| x | | 1 | | 3/2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| x − 1 | − | 0 | + | \| | + |
| 2x − 3 | − | \| | − | 0 | + |
| $\dfrac{x-1}{2x-3}$ | + | 0 | − | \|\| | + |

Từ đó, suy ra: $\dfrac{x-1}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$.

Vậy với $x \leq 1$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Vậy với $x > \dfrac{3}{2}$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là: $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-3}} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Vậy với $x > \dfrac{3}{2}$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

**Bài 8:**

a. Để A có nghĩa điều kiện là: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

b. Biến đổi A về dạng:

$$A = \left( \frac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}.\sqrt{\sqrt{x}-1}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \left( \frac{|\sqrt{x}-1| + |\sqrt{x}+1|}{\sqrt{\sqrt{x^2}-1}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\overset{x>1}{=} \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}} . \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}.$$

c. Với $x = 19 - 8\sqrt{3}$, ta có:

$$\sqrt{x} = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{4^2 - 2.4.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} = \left|4 - \sqrt{3}\right| = 4 - \sqrt{3}$$

do đó: $A = 2(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3}$.

**CHỦ ĐỀ 5**

# BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐƯA MỘT THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN**

Ta có: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$, với $B \ge 0$.

**2. ĐƯA MỘT THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN**

Ta có: $|A|\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, với $B \ge 0$.

Ta có hai trường hợp:

1. Nếu $A \ge 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, với $B \ge 0$.
2. Nếu $A < 0$ thì $A\sqrt{B} = -|A|\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$, với $B \ge 0$.

**3. KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN**

Ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A.B}{B^2}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{A.B}$, với $A.B \ge 0$, $B \ne 0$.

**4. TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU**

Để trục căn thức ở mẫu, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1:* Phân tích tử và mẫu ra thừa số chung chứa căn rồi rút gọn thừa số đó.

*Cách 2:* Nhân tử và mẫu với thừa số thích hợp để làm mất căn thức ở mẫu. Có các dạng cơ bản sau:

1. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ $(B > 0)$.
2. $\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{A-B}$,
   với $A > 0$, $B > 0$, $A \ne B$.
3. $\frac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{A-B}$,
   với $A > 0$, $B > 0$, $A \ne B$.

Hai phép biến đổi dạng 2 và dạng 3 gọi là phép nhân liên hợp.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Vấn đề 1: ĐƯA MỘT THỪA SỐ VÀO TRONG HOẶC RA NGOÀI DẤU CĂN**

**Ví dụ 1:** *Viết gọn các biểu thức sau:*

a. $A = \sqrt{25.90}$.　　　　b. $B = \sqrt{75.54}$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $A = \sqrt{25.90} = \sqrt{25.9.10} = 5.3\sqrt{10} = 15\sqrt{10}$.

b. Ta có: $B = \sqrt{75.54} = \sqrt{25.3.9.6} = 5.3\sqrt{3.2.3} = 45.\sqrt{2}$.

**Ví dụ 2:** *Rút gọn biểu thức sau:* $A = \dfrac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a^2-4a+4)}$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a-2)^2} = \frac{2\sqrt{2}a^4.|a-2|}{a-2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}a^4.(a-2)}{a-2} \text{ nếu } a-2>0 \\ -\dfrac{2\sqrt{2}a^4.(a-2)}{a-2} \text{ nếu } a-2<0 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{2}a^4 \text{ nếu } a>2 \\ -2\sqrt{2}a^4 \text{ nếu } a<2 \end{cases}.$$

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, ở trong A có thể đưa được $a^8$ và $(a-2)^2$ ra ngoài dấu căn. Tuy nhiên, ta thấy rằng:

$\sqrt{a^8} = \sqrt{(a^4)^2} = a^4$, bởi $a^4 \ge 0$ với mọi a.

$\sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$, bởi ta chưa xác định được dấu của $a-2$.

**Ví dụ 3:** *Chứng minh rằng:* $\dfrac{a-b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = |a|$, với $a > b$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn.

Vì $a > b$ nên $\dfrac{a-b}{b^2} > 0$, do đó:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{b^4}\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

*Cách 2*: Sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

Ta có:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{b^2}.\frac{|a|.b^2}{|a-b|}$$

$$\overset{a>b}{=} \frac{a-b}{b^2}.\frac{|a|.b^2}{(a-b)} = |a| \text{ (đpcm)}.$$

☛ *Nhận xét*: Như vậy, phép biến đổi đưa thừa số vào trong dấu căn đã giúp chúng ta có thể chứng minh được đẳng thức. Ngoài ra, nó còn rất cần thiết trong các phép tính toán, thí dụ:

1. Để so sánh $\sqrt{31}$ và $2\sqrt{7}$, ta biến đổi:

$$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2.7} = \sqrt{28} < \sqrt{31}.$$

2. Khi tính $3\sqrt{2}$:
   - Nếu ta tính $\sqrt{2} \approx 1,41$ (sai chưa đến 0,01) rồi nhân 3 thì sai số sẽ gấp 3 lần sai số của giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$ mà ta đã lấy.
   - Còn nếu ta thực hiện $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2.2} = \sqrt{18}$, rồi dùng bảng tìm giá trị gần đúng của $\sqrt{18}$ thì sai số không bị nhân lên 3 lần như cách làm trên.

**Ví dụ 4:** *Sắp xếp các số sau theo thứ thự giảm dần*:

$$6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{7}.$$

✍ *Giải*

Sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn, ta viết lại dãy số dưới dạng:

$$6\sqrt{2} = \sqrt{72}, 4\sqrt{5} = \sqrt{80}, 2\sqrt{13} = \sqrt{52}, 3\sqrt{7} = \sqrt{63},$$

do đó, ta có sắp xếp $4\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{13}$.

## Vấn đề 2: KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC DƯỚI DẤU CĂN – PHÉP NHÂN LIÊN HỢP

**Ví dụ 1:** *Khử mẫu số của các biểu thức dưới dấu căn*:

a. $\sqrt{\dfrac{7}{12}}$.

b. $\sqrt{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi: $\sqrt{\dfrac{7}{12}} = \sqrt{\dfrac{7}{4.3}} = \sqrt{\dfrac{7.3}{36}} = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

b. Ta biến đổi: $\sqrt{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a-1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a-1}}{|a|}$.

**Ví dụ 2:** *Trục căn thức ở mẫu*:

a. $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}$.

b. $\dfrac{\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a-1}-1}$.

c. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

d. $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi: $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{(a+1)\sqrt{a^2-1}}{a^2-1} = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}$.

b. Ta biến đổi:

$$\frac{\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a-1}-1} = \frac{(\sqrt{a-1}+1)^2}{(\sqrt{a-1}-1)(\sqrt{a-1}+1)} = \frac{(\sqrt{a-1}+1)^2}{a-1-1} = \frac{(\sqrt{a-1}+1)^2}{a-2}.$$

c. Ta biến đổi: $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b)$.

hoặc có thể biến đổi:

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a^2-b^2)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(a^2-b^2)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$= (a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

d. Ta biến đổi: $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}} = \dfrac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}} = \dfrac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}.(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}$

$$= \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}.(1-\sqrt{a})}{1-a} = \sqrt{1+\sqrt{a}}.(1-\sqrt{a}).$$

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải câu b), chúng ta phải đi trục căn thức hai lần. Các em học sinh có thể thực hiện theo chiều ngược lại.

**Ví dụ 3:** *Cho* a, b, c, d *là các số dương thoả mãn* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. *Hãy trục căn thức ở mẫu của biểu thức:* $P = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$.

✍ *Giải*

Đặt $t = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, ta được a = bt và c = dt.

Khi đó, biểu thức được viết lại dưới dạng:

$$P = \frac{1}{\sqrt{bt}+\sqrt{b}+\sqrt{dt}+\sqrt{d}} = \frac{1}{(\sqrt{b}+\sqrt{d})(\sqrt{t}+1)} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{d})(\sqrt{t}-1)}{(b-d)(t-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{d})\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)}{(b-d)\left(\frac{a}{b}-1\right)} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(b-d)(a-b)}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong cuốn Toán nâng cao 8 chúng ta đã từng thấy khẳng định của Pô–li–a rằng *yếu tố phụ như một nhịp cầu để nối bài toán cần tìm ra cách giải với bài toán đã biết cách giải* và ở đây chúng ta có thể khẳng định thêm rằng *việc đưa yếu tố phụ còn có tác dụng như một chiếc đòn bẩy, giúp ta giải bài toán nhẹ nhàng hơn.*

## Vấn đề 3: SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CHO BÀI TOÁN RÚT GỌN VÀ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** *Rút gọn biểu thức*: $A = \dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$A = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{7} + \sqrt{5}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu thực hiện theo phương pháp " *quy đồng mẫu số* ", ta được:

$$A = \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + 2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}.$$

bài toán sẽ dừng lại ở đây.

**Ví dụ 2:** *Chứng minh rằng*: $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, với a, b > 0.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng: $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$.

Từ đó, suy ra: $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}$

$$= a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab} = a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$= (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \text{ (đpcm).}$$

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, chúng ta dựa trên hằng đẳng thức để phân tích tử số ra thừa số chung từ đó rút gọn được căn thức ở mẫu. Tất nhiên, chúng ta có thể lựa chọn phép nhân liên hợp xong cách giải này phức tạp hơn.

**Ví dụ 4:** *Chứng minh rằng*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} - 1.$$

*Giải*

Nhận xét rằng: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1.$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} - \sqrt{2008}$$

Thực hiện phép cộng theo vế và rút gọn, ta được:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} - 1 \text{ (đpcm).}$$

***Nhận xét***: Trong lời giải trên, để chứng minh đẳng thức chúng ta lựa chọn phép nhân liên hợp để khử căn thức ở mẫu cho từng phân số. Và ở đây chúng ta sử dụng phép biến đổi cục bộ.

**Ví dụ 3:** *Cho biểu thức*: $A = \left(\sqrt{1-x} + \dfrac{3}{\sqrt{1+x}}\right) : \left(1 + \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

a. *Tìm điều kiện để* A *có nghĩa.*

b. *Rút gọn* A.

c. *Tính giá trị của* A *khi* $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

d. *Tìm* x *để* $\sqrt{A} > A$.

*Giải*

a. Điều kiện để A có nghĩa: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x > 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$ (*)

Vậy, điều kiện tồn tại của A là $-1 < x < 1$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}+3}{\sqrt{1+x}} : \frac{\sqrt{1-x^2}+3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}+3}{\sqrt{1+x}} . \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+3} = \sqrt{1-x}.$$

c. Trước tiên, ta viết lại x dưới dạng:

$$x = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4-3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Khi đó, ta suy ra:

$$A = \sqrt{1-(2\sqrt{3}-3)} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1.$$

d. Để $\sqrt{A} > A$, điều kiện là: $A < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} < 1 \Leftrightarrow 1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Kết hợp với (*), ta được $0 < x < 1$.

Vậy, với $0 < x < 1$ thì $\sqrt{A} > A$.

**Ví dụ 4:** *Cho biểu thức:* $A = (x-3)\sqrt{\dfrac{x}{9-x^2}}$.

a. *Tìm điều kiện để* A *có nghĩa.*

b. *Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức* A *khi* $x = 1$.

*Giải*

a. Điều kiện để A có nghĩa: $\begin{cases} \dfrac{x}{9-x^2} \ge 0 \\ 9-x^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{(3-x)(3+x)} \ge 0 \\ (3-x)(3+x) \ne 0 \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu từ đó thu được $x < -3$ hoặc $0 \le x < 3$.

Vậy, điều kiện tồn tại của A là $x < -3$ hoặc $0 \le x < 3$.

b. Từ kết quả câu a), suy ra $x - 3 < 0$, do đó:

$$A=(x-3)\sqrt{\frac{x}{9-x^2}} = -|x-3|\sqrt{\frac{x}{9-x^2}} = -\sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(3-x)(3+x)}} = -\sqrt{\frac{x(3-x)}{3+x}}.$$

Thay $x = 1$ vào A, ta được: $A = -\sqrt{\dfrac{1(3-1)}{3+1}} = -\sqrt{\dfrac{2}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

☛ ***Chú ý***: Bài toán sẽ có một kết quả sai nếu các em học sinh không đánh giá điều kiện $0 \le x < 3$, dẫn đến sai lầm trong quá trình biến đổi.

$$A = (x-3)\sqrt{\frac{x}{9-x^2}} = \sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(3-x)(3+x)}} = \sqrt{\frac{x(3-x)}{3+x}}.$$

Với biến đổi như vậy thì kết quả câu b) sẽ là $A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

## Vấn đề 4: SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** *Với giá trị nào của* x *thì ta có:*

a. $\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$.

b. $\sqrt{a(1-3x)^2} = (3x-1)\sqrt{a}$.

*Giải*

a. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow |x|\sqrt{3} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow |x| = x \Leftrightarrow x \ge 0.$$

Vậy, với $x \ge 0$ ta có được đẳng thức đã cho.

b. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{a(1-3x)^2} = (3x-1)\sqrt{a} \Leftrightarrow |1-3x|\sqrt{a} = (3x-1)\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow |1-3x| = 3x-1 \Leftrightarrow 1-3x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $x \ge \frac{1}{3}$ ta có được đẳng thức đã cho.

**Ví dụ 2:** *Giải phương trình:* $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6.$

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{2}\sqrt{4(x-2)} - 9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2}.2\sqrt{x-2} - 9.\frac{1}{9}\sqrt{x-2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 9 \Leftrightarrow x = 11.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 11.

***Nhận xét***: Như vậy, với phương trình trong câu a), chúng ta sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn để biến đổi nó về dạng $\sqrt{f} = g$. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn để giải, cụ thể:

$$\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} = 3\sqrt{\frac{1}{4}(4x-8)} = 3\sqrt{x-2}.$$

$$9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = \sqrt{\frac{81(x-2)}{81}} = \sqrt{x-2}.$$

Xong cách biến đổi kiểu này rất thụ động.

**Ví dụ 3:** *Giải các phương trình sau:*

a. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} + 2 = 0.$

b. $2x - 5a\sqrt{x-a} + 2a^2 - 2a = 0$, với $a > 0$.

*Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - x - (\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+1-x^2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

b. Đặt $t = \sqrt{x-a}$, điều kiện $t \ge 0$. Suy ra $t^2 = x - a \Leftrightarrow x = t^2 + a$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2(t^2 + a) - 5at + 2a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5at + 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2a)(2t-a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 2a = 0 \\ 2t - a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = \dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-a} = 2a \\ \sqrt{x-a} = \dfrac{a}{2} \end{array}\right. \overset{a>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x - a = 4a^2 \\ x - a = \dfrac{a^2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4a^2 + a \\ x = \dfrac{a^2 + 4a}{4} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 4a^2 + a$ và $x = \dfrac{a^2 + 4a}{4}$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy:

1. Với phương trình trong câu a), chúng ta sử dụng phép quy đồng cục bộ vì nhận thấy mẫu số của phân số thứ nhất là liên hợp của mẫu số của phân số thứ hai.
2. Với phương trình trong câu b), chúng ta sử dụng phép đặt ẩn phụ để nhận được một phương trình bậc hai, từ đó sử dụng kiến thức về phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi nó về dạng tích và nhận được hai nghiệm $t = 2a$ và $t = \dfrac{a}{2}$ (lưu ý rằng cả hai nghiệm này đều thoả mãn $t \ge 0$ do giả thiết $a > 0$).

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** So sánh các cặp số sau:

a. $4\sqrt{7}$ và $3\sqrt{13}$.

b. $5\sqrt{11}$ và $3\sqrt{21}$.

c. $\dfrac{3}{4}\sqrt{5}$ và $\dfrac{4}{9}\sqrt{7}$.

d. $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ và $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

**Bài 2:** So sánh cặp số sau: $A = \dfrac{15}{\sqrt{6}+1} + \dfrac{4}{\sqrt{6}-2}$ và $B = \dfrac{12}{3-\sqrt{6}} + \sqrt{6}$.

**Bài 3:** Trục căn thức ở mẫu:

a. $A = \dfrac{1 - a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$.

b. $B = \dfrac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}}$.

c. $C = \dfrac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}$.

d. $D = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

**Bài 4:** Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{1}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$.

b. $B = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}}$.

**Bài 5:** Với giá trị nào của x thì ta có:

a. $\sqrt{7x^2} = -x\sqrt{7}$. b. $\sqrt{a(x-2)^2} = (2-x)\sqrt{a}$.

**Bài 6:** Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a+b}{a-b}$, với a, b $\geq 0$ và a $\neq$ b.

b. $\dfrac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\sqrt{\dfrac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} = b$, với $a > b > 0$.

**Bài 7:** Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{4x-16} + \sqrt{x-4} - \dfrac{1}{3}\sqrt{9x-36} = 4$.

b. $\sqrt{9x-9} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{16x-16} - 3\sqrt{x-1} = 16$.

**Bài 8:** Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} + 2 = 0$.

b. $\dfrac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{2x}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{5} + 1$.

**Bài 9:** Giải các phương trình sau:

a. $2x - 7\sqrt{x} + 5 = 0$. b. $x - 6\sqrt{x-3} - 10 = 0$.

**Bài 10:** Cho biểu thức: $A = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 1$.

a. Tìm điều kiện để A có nghĩa.
b. Rút gọn A.
c. Hãy so sánh |A| với A, biết $x > 1$.
d. Tìm x để A = 2.
e. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. Ta có: $4\sqrt{7} = \sqrt{4^2.7} = \sqrt{112}$, $3\sqrt{13} = \sqrt{3^2.13} = \sqrt{117}$.

Vậy, ta được $4\sqrt{7} < 3\sqrt{13}$.

b. Ta có: $5\sqrt{11} = \sqrt{5^2.11} = \sqrt{275}$; $3\sqrt{21} = \sqrt{3^2.21} = \sqrt{189}$.

Vậy, ta được $5\sqrt{11} > 3\sqrt{21}$.

c. Ta có: $\dfrac{3}{4}\sqrt{5} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2.5} = \sqrt{\dfrac{45}{16}}$; $\dfrac{4}{9}\sqrt{7} = \sqrt{\left(\dfrac{4}{9}\right)^2.7} = \sqrt{\dfrac{112}{81}}$.

Vậy, ta được $\dfrac{3}{4}\sqrt{5} > \dfrac{4}{9}\sqrt{7}$.

d. Ta có: $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}.$$

Vậy, ta được $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} > \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

**Bài 2:** Ta có:

$$A = \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} = \frac{15(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$$

$$= \frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4} = 3(\sqrt{6}-1) + 2(\sqrt{6}+2) = \sqrt{6}+1.$$

$$B = \frac{12}{3-\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{12(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})} = \frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6} = 4(3+\sqrt{6}).$$

Vậy, ta được A < B.

**Bài 3:**

a. Ta có: $A = \frac{1-\sqrt{a^3}}{1-\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} = 1+\sqrt{a}+a$.

b. Ta có: $B = \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{2^2.2}} = \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{18}$.

c. Ta có: $C = \frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})}{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})} = \frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}{(a+3)-(a-3)}$

$$= \frac{a+3+2\sqrt{a+3}\sqrt{a-3}+a-3}{a+3-a+3} = \frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{a+3-a+3} = \frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{6}.$$

d. Ta có: $D = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$$= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{2}+2)-3} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{3.2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.$$

**Bài 4:**

a. Ta có: $A = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}+\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(\sqrt{7}+2\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{7}}{7-4.3} = -\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

b. Ta có: $B = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2.2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2-1}$

$$= 3+\sqrt{2}.$$

**Bài 5:**

a. Ta biến đổi tương đương: $\sqrt{7x^2} = -x\sqrt{7} \Leftrightarrow |x|\sqrt{7} = -x\sqrt{7} \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \le 0$.

Vậy, với $x \le 0$ ta có được đẳng thức đã cho.

b. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{a(x-2)^2} = (2-x)\sqrt{a} \Leftrightarrow |x-2|\sqrt{a} = (2-x)\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = 2-x \Leftrightarrow 2-x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Vậy, với $x \ge 2$ ta có được đẳng thức đã cho.

**Bài 6:**

a. Thực hiện phép quy đồng mẫu số cho vế trái (VT), ta được:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b}{a-b}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$\frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

$$\sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} = \sqrt{\frac{b[(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2]}{a^2+2a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}} = \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}}.$$

Do đó:

$$VT = \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}} = \frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = b \text{ (đpcm).}$$

**Bài 7:**

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 8$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x-1} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 8 \Leftrightarrow x-1 = 64 \Leftrightarrow x = 65.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 65$.

**Bài 8:**

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1-(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Nhận xét rằng:

$$\frac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2x(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2x(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = x(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

$$\frac{2x}{\sqrt{3}+1} = \frac{2x(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2x(\sqrt{3}-1)}{3-1} = x(\sqrt{3}-1).$$

Do đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$x(\sqrt{5}+\sqrt{3}) - x(\sqrt{3}-1) = \sqrt{5}+1 \Leftrightarrow x(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1) = \sqrt{5}+1$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{5}+1) = \sqrt{5}+1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

**Bài 9:**

a. Đặt $t = \sqrt{x}$, điều kiện $t \ge 0$.

Khi đó, phương trình có dạng: $2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 2t-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{25}{4} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{25}{4}$.

b. Đặt $t = \sqrt{x-3}$, điều kiện $t \ge 0$. Suy ra: $t^2 = x - 3 \Leftrightarrow x = t^2 + 3$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 3 - 6t - 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \text{ vô nghiệm} \\ t-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 7 \Leftrightarrow x - 3 = 49 \Leftrightarrow x = 52.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 52$.

**Bài 10:**

a. Điều kiện để A có nghĩa: $\begin{cases} x > 0 \\ x - \sqrt{x} + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Vậy, với $x > 0$ thì A có nghĩa.

b. Nhận xét rằng:

$$x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}[(\sqrt{x})^3 + 1] = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1).$$

$$2x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1).$$

Do đó, biểu thức A được biến đổi về dạng:

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + 1$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - (2\sqrt{x} + 1) + 1 = x - \sqrt{x}.$$

c. Nhận xét rằng, với $x > 1$, ta có ngay: $x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow A > 0 \Rightarrow |A| = A$.

d. Để $A = 2$, điều kiện là: $x - \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x}$, điều kiện $t \ge 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \\ t-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, điều kiện là $x = 4$.

e. Ta có: $A = x - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \ge -\dfrac{1}{4}$.

Do đó $A_{Min} = -\dfrac{1}{4}$, đạt được khi: $\sqrt{x} - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

**CHỦ ĐỀ 6** RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN BẬC HAI

# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**Để rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai ta thực hiện theo các bước:**

***Bước 1:*** **Thực hiện các phép biến đổi đơn giản:**

1. **Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.**
2. **Đưa một thừa số vào trong dấu căn.**
3. **Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn.**
4. **Trục căn thức ở mẫu.**

***Bước 2:*** **Thực hiện phép tính.**

**Ta có kết quả:** $a\sqrt{A} - b\sqrt{A} + c\sqrt{A} + d = (a - b + c)\sqrt{A} + d$ **với** $A \geq 0$ **và** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Vấn đề 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN BẬC HAI**

**Ví dụ 1:** *Thực hiện phép tính:*

a. $3\sqrt{8} - \sqrt{18} - 5\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{50}$.

b. $\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

*Giải*

a. Ta biến đổi:

$$3\sqrt{8} - \sqrt{18} - 5\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4.2} - \sqrt{9.2} - 5\sqrt{\frac{2}{2^2}} + \sqrt{25.2}$$

$$= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \frac{5}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (6 - 3 - \frac{5}{2} + 5)\sqrt{2} = \frac{11\sqrt{2}}{2}.$$

b. Ta biến đổi từng thành phần trong biểu thức:

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, ở đây ta sử dụng phép phân tích tử số.

$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$, ở đây ta sử dụng phép nhân liên hợp

$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

$\frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$.

Như vậy: $\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \sqrt{3} + 1 = 1$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, với yêu cầu "*Thực hiện phép tính*" của các biểu thức chứa căn bậc hai chúng ta cần linh hoạt sử dụng bốn quy tắc biến đổi đã biết, cụ thể:

1. Ở câu a), chúng ta đã sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn cho $3\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$. Còn đối với $5\sqrt{\frac{1}{2}}$ ta biến đổi nó về dạng có mẫu số bình phương là $5\sqrt{\frac{2}{2^2}}$, tất nhiên cũng có thể biến đổi:

$$5\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

2. Ở câu b), mỗi thành phần đều có nhiều cách biến đổi, cụ thể ngoài cách đã trình bày trong lời giải trên chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1.$$

**Ví dụ 2:** *Thực hiện các phép tính*:

a. $A = 15\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. b. $B = \sqrt{\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{6}}{7-\sqrt{6}}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $A = 15\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 15\left(\frac{1}{5}\sqrt{15} + \frac{1}{3}\sqrt{15}\right) = 15.\frac{8}{15}\sqrt{15} = 8\sqrt{15}$.

b. Ta có thể làm theo 2 cách:

*Cách 1:* Sử dụng phương pháp quy đồng mẫu số, ta có:

$$B = \sqrt{\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{6}}{7-\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{7-\sqrt{6}}}{\sqrt{7+\sqrt{6}}} - \frac{\sqrt{7+\sqrt{6}}}{\sqrt{7-\sqrt{6}}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{7-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\sqrt{7+\sqrt{6}}\right)^2}{\sqrt{7+\sqrt{6}}.\sqrt{7-\sqrt{6}}} = \frac{7-\sqrt{6}-7-\sqrt{6}}{\sqrt{(7+\sqrt{6})(7-\sqrt{6})}.} = -2\sqrt{6}.$$

*Cách 2:* Sử dụng phương pháp trục căn thức ở mẫu, ta có:

$$B = \sqrt{\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{6}}{7-\sqrt{6}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(7-\sqrt{6})^2}{(7+\sqrt{6})(7-\sqrt{6})}} - \sqrt{\frac{(7+\sqrt{6})^2}{(7+\sqrt{6})(7-\sqrt{6})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(7-\sqrt{6})^2}{7-6}} - \sqrt{\frac{(7+\sqrt{6})^2}{7-6}} = 7-\sqrt{6} - 7 - \sqrt{6} = -2\sqrt{6}.$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh cần phải linh hoạt trong việc lựa chọn cách biến đổi. Trong nhiều bài toán việc trục căn thức ở mẫu sẽ làm cho các bước quy đồng đơn giản hơn nhiều.

**Ví dụ 3:** Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = 2\sqrt{3x} + \sqrt{27x} - \sqrt{8x} + \sqrt{50x} + \sqrt{x}$.

b. $B = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{xy} + \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$, với $x.y > 0$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$A = 2\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} - 2\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} + \sqrt{x}$$

$$= (2+3)\sqrt{3x} + (-2+5)\sqrt{2x} + \sqrt{x}$$

$$= 5\sqrt{3x} + 3\sqrt{2x} + \sqrt{x} = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 1)\sqrt{x}.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} + \sqrt{xy} + \frac{x}{y}\sqrt{\frac{xy}{x^2}} = \frac{1}{|y|}\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + \frac{x}{|x|y}\sqrt{xy}$$

$$= \left(\frac{1}{|y|} + 1 + \frac{x}{|x|y}\right)\sqrt{xy}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{y}\right)\sqrt{xy} & \text{nếu } x, y > 0 \\ \left(-\frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\right)\sqrt{xy} & \text{nếu } x, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(y+2)\sqrt{xy}}{y} & \text{nếu } x, y > 0 \\ \frac{(y-2)\sqrt{xy}}{y} & \text{nếu } x, y < 0 \end{cases}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với yêu cầu " *Rút gọn* " các biểu thức chứa căn bậc hai chúng ta vẫn linh hoạt sử dụng bốn quy tắc biến đổi đã biết. Tuy nhiên, trong câu b) chúng ta lưu ý tới $\sqrt{a^2} = |a|$, từ đó thực hiện thêm việc phá dấu trị tuyệt đối.

**Ví dụ 4:** *Chứng minh rằng:* $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=4\sqrt{6}$.

*Giải*

Nhận xét rằng:

$$5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

$$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

suy ra: $$\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}.$$

$$\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}.$$

Do đó: VT $=5+2\sqrt{6}-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$ (đpcm).

***Nhận xét***: Đối với biểu thức đã cho, nếu không khéo léo đánh giá được $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ và $5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ mà thực hiện phép nhân liên hợp để khử mẫu thì sẽ nhận được kết quả rất phức tạp.

**Ví dụ 5:** *Cho* a, b, c, d, A, B, C, D *là những số dương thoả mãn*:

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{d}{D}.$$

*Chứng minh rằng*:

$$\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}+\sqrt{dD}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}.$$

*Giải*

Đặt $t=\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{d}{D}$, ta được: $\begin{cases}a=At\\b=Bt\\c=Ct\\d=Dt\end{cases}$.

Khi đó, đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{A^2t}+\sqrt{B^2t}+\sqrt{C^2t}+\sqrt{D^2t}=\sqrt{(At+Bt+Ct+Dt)(A+B+C+D)}$$

$\Leftrightarrow (A+B+C+D)\sqrt{t}=(A+B+C+D)\sqrt{t}$ luôn đúng.

**Ví dụ 6:** *Cho ba số dương* x, y, z *thoả mãn* x + y + z = xyz. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}-\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+z^2}}{yz}+$$

$$+\frac{\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)}-\sqrt{1+z^2}-\sqrt{1+x^2}}{zx}+$$

$$+\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}}{xy}=0.$$

✍ *Giải*

Đặt $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, ta được đẳng thức điều kiện là:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc} \Leftrightarrow bc+ca+ab=1. \quad (1)$$

Và khi đó, đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}+\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}=$$

$$=(b+c)\sqrt{1+a^2}+(c+a)\sqrt{1+b^2}+(a+b)\sqrt{1+c^2}.$$

Nhận xét rằng:

$1+a^2=bc+ca+ab+a^2=(a+b)(a+c)$

$1+b^2=bc+ca+ab+b^2=(b+c)(b+a)$

$1+c^2=bc+ca+ab+c^2=(c+b)(c+a)$

từ đó, suy ra:

$$\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}=(b+c)\sqrt{(b+a)(c+a)}=(b+c)\sqrt{1+a^2}. \quad (2)$$

tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}=(c+a)\sqrt{1+b^2}. \quad (3)$$

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}=(a+b)\sqrt{1+c^2}. \quad (4)$$

Cộng theo vế (2), (3), (4) ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

**Ví dụ 7:** *Cho biểu thức:* $P=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+3}{x-9}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-1\right)$.

a. *Rút gọn biểu thức* P.

b. *Tìm* x *để* $P<-\frac{1}{2}$.

c. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* B.

*Giải*

a. Điều kiện $0 \le x \ne 9$.

Ta có: $P = \dfrac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-3x-3}{x-9} : \dfrac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

$= \dfrac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x-3}{x-9} : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

$= \dfrac{-3\sqrt{x}-3}{x-9} : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{-3(\sqrt{x}+1)}{x-9}.\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}$.

b. Ta có: $P < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+3} < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{1}{2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6+\sqrt{x}+3}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le x < 9.$

Vậy, với $0 \le x < 9$ thì $P < -\dfrac{1}{2}$.

c. Ta có $P = \dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}$.

Nhận xét: $x \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \ge 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+3} \le \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1.(-3)}{\sqrt{x}+3} \ge \dfrac{1.(-3)}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+3} \ge -1 \Leftrightarrow P \ge -1$

Vậy, suy ra $P_{min} = -1$ đạt được khi $x = 0$.

**Ví dụ 8:** *Tính giá trị biểu thức:* $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$

*trong đó, a là nghiệm dương của phương trình:* $4x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0$. (1)

*Giải*

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu nên ta có:

$4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0 \ (a > 0)$ (2)

Từ (2) dễ thấy: $a^2 = \dfrac{1-a}{2\sqrt{2}}$ và $a^4 = \dfrac{1-2a+a^2}{8}$.

Gọi biểu thức cần tính là S, ta có:

$S = \dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2} = \sqrt{a^4+a+1} + a^2 = \sqrt{\dfrac{1-2a+a^2+8a+8}{8}} + \dfrac{1-a}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{a+3}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

**Ví dụ 9:** *Cho biểu thức:* $P = \left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$.

a. *Rút gọn biểu thức* P. b. *Tìm a để* $P < 7-4\sqrt{3}$.

*Giải*

a. Điều kiện: $\begin{cases} a \ge 0 \\ 1-\sqrt{a} \ne 0 \\ 1+\sqrt{a} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ \sqrt{a}(\sqrt{a}-1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le a \ne 1.$

Ta có:

$$P = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$$

$$= \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a)}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$$

$$= (1+\sqrt{a}+a+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a-\sqrt{a})$$

$$= (1+2\sqrt{a}+a)(1-2\sqrt{a}+a) = (1+\sqrt{a})^2(1-\sqrt{a})^2 = (1-a)^2.$$

b. Ta có:

$$P < 7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow (1-a)^2 < 7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow (1-a)^2 < 4-2.2\sqrt{3}+3$$

$$\Leftrightarrow (1-a)^2 < (2-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow |1-a| < 2-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}-2 < a-1 < 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}-1 < a < 3-\sqrt{3}.$$

Vậy, với $\sqrt{3}-1 < a < 3-\sqrt{3}$ thì $P < 7-4\sqrt{3}$.

**Ví dụ 10:** *Cho biểu thức:* $A = 1:\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$.

a. *Tìm tập xác định của* A.

b. *Rút gọn biểu thức* A.

c. *So sánh* A *với* 3.

*Giải*

a. Điều kiện để biểu thức A có nghĩa: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x\sqrt{x}-1 \ne 0 \\ x+1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$.

b. Ta có:

$$A = 1:\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$$

$$= 1:\left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right]$$

$$= 1 : \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right]$$

$$= 1 : \left[\frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$= 1 : \left[\frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right] = 1 : \left[\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$= 1 : \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right] = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

c. Xét hiệu: $A - 3 = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 3 = \dfrac{x+\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$.

Nhận thấy: $\begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2 \ge 0\\ \sqrt{x} \ge 0\\ 0 < x \ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2 > 0\\ \sqrt{x} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \ge 0$

do đó: $A - 3 \ge 0 \Leftrightarrow A \ge 3$. Vậy, ta được $A \ge 3$.

☛ ***Nhận xét***: Ta có thể thực hiện rút gọn biểu thức A với cách khác như sau:

Đặt: $\sqrt{x} = a$, $0 < a \ne 1$. Ta được:

$$A = 1 : \left(\frac{a^2+2}{a^3-1} + \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{a+1}{a^2-1}\right)$$

$$= 1 : \left[\frac{a^2+2}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{1}{a-1}\right] = 1 : \left[\frac{a^2-a}{(a-1)(a^2+a+1)}\right]$$

$$= \frac{a^2+a+1}{a}.$$

Thay $a = \sqrt{x}$ vào biểu thức A vừa rút gọn, ta được:

$$A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

Chúng ta đã được biết:

$$\boxed{(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA}$$

Việc chứng minh hằng đẳng thức trên xin được dành cho bạn đọc, còn trong mục này chúng ta sẽ đi sâu vào việc khai thác nó để giải một vài dạng toán mà kết quả nhận được rất ngạc nhiên, cụ thể:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}$$

$$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}. \quad (1)$$

Như vậy, nếu có điều kiện a + b + c = 0 ta sẽ nhận được:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}. \quad (2)$$

Khi đó:

- Nếu thay c = –(a + b), ta sẽ nhận được:

$$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right| = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}. \quad (3)$$

- Nếu thay a, b, c bởi bộ ba số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, ta sẽ nhận được:

$$\left|a+b-\frac{ab}{a+b}\right| = \sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}. \quad (4)$$

☛ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy sử dụng ý tưởng trên để khai thác cho các hằng đẳng thức:

$$(A + B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB - 2BC - 2CA$$
$$(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB + 2BC - 2CA$$
$$(A + B + C)^3, (A + B - C)^3$$

**Ví dụ 11:** *Rút gọn biểu thức*:

$$S = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}}.$$

*Giải*

Sử dụng (2) bằng cách thay a, b, c bởi bộ ba số $a^2, b^2, -(a^2 + b^2)$, ta sẽ nhận được:

$$\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}} = \left|\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}\right| = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}$$

Khi đó, S được chuyển về dạng:

$$S = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|, \text{ theo (3).}$$

**Ví dụ 12:** *Cho* a, b, c *là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:*

$$S = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

✍ *Giải*

Sử dụng (2) bằng cách thay a, b, c bởi bộ ba số (a – b), (b – c), (c – a), ta sẽ nhận được: $S = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$.

Vậy S là số hữu tỉ do giả thiết a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau.

**Ví dụ 13:** *Cho tổng:*

$$S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}}$$

a. *Tính* $S_{2006}$.

b. *Chứng minh rằng với mọi* $n \geq 3$ *thì* $S_n$ *là số hữu tỉ nhưng không thể là số nguyên.*

✍ *Giải*

Sử dụng (2) bằng cách thay a, b, c bởi bộ ba số 1, (n – 1), – n, ta sẽ nhận được:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}} = \left|1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right| = 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Từ đó, suy ra:

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-2 \text{ số } 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = (n-2).1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = n - \frac{1}{n} - \frac{3}{2}.$$

a. Ta có ngay: $S_{2006} = 2006 - \frac{1}{2006} - \frac{3}{2} = \frac{4021026}{2006} = \frac{2010513}{1003}$.

b. Dễ thấy ngay được khẳng định "*$S_n$ là số hữu tỉ nhưng không thể là số nguyên*".

## Vấn đề 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** *Giải phương trình:* $3\sqrt{2x} - \sqrt{18x^3} + 4\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{128x} = 0.$

✍ *Giải*

Điều kiện $x \geq 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sqrt{2x} - 3x\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{2x} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x}(1-x) = 0$$

ABC

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x} = 0\\ 1 - x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 1\end{array}\right.$$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình có các nghiệm x = 0 và x = 1.

**Ví dụ 2:** *Giải phương trình:* $\dfrac{2\sqrt{x} - 7}{3} + \sqrt{x} - \dfrac{3\sqrt{x} - 5}{2} = 1.$

✍ *Giải*

Điều kiện $x \geq 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{7}{3} + \sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{x} = 1 + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\sqrt{x} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình có nghiệm x = 25.

**Ví dụ 3:** *Tìm tất cả các số hữu tỉ x để số:*

$P = \sqrt{x^2 + 19x + 93}$ *là số hữu tỉ.*

✍ *Giải*

Ta có kết quả " *Nếu* x, y ∈ **Q** *thì* x − y ∈ **Q**", từ đó suy ra:

$$\sqrt{x^2 + 19x + 93} - x = y \in \mathbf{Q}.$$

Khi đó, ta được:

$$\sqrt{x^2 + 19x + 93} = x + y \Rightarrow x^2 + 19x + 93 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow x(19 - 2y) = y^2 - 93. \quad (1)$$

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu 19 − 2y = 0, khi đó ta được: $\begin{cases} y = \dfrac{19}{2} \\ 0 = \left(\dfrac{19}{2}\right)^2 - 93 \end{cases}$, vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu 19 − 2y ≠ 0, khi đó (1) có dạng: $x = \dfrac{y^2 - 93}{19 - 2y}$.

Thử lại, với $x = \dfrac{y^2 - 93}{19 - 2y}$, và $y \neq \dfrac{19}{2}$ ta có:

$$\sqrt{x^2 + 19x + 93} = \sqrt{\left(\frac{y^2 - 93}{19 - 2y}\right)^2 + \frac{19(y^2 - 93)}{19 - 2y} + 93}$$

$$= \sqrt{\frac{y^4 - 38y^3 + 547y^2 - 3534y + 8649}{(19 - 2y)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(y^2 - 19y + 93)^2}{(19 - 2y)^2}} = \frac{y^2 - 19y + 93}{|19 - 2y|} \in \mathbf{Q}.$$

Vậy, với các số x có dạng $x = \frac{y^2 - 93}{19 - 2y}$, và $y \neq \frac{19}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

b. $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

c. $C = 12\left(\sqrt{\frac{2}{6}} + \sqrt{\frac{6}{2}}\right)$.

d. $D = \sqrt{72} + 4{,}5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + 2\sqrt{27}$.

**Bài 2:** Rút gọn biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + 1$.

b. $B = \sqrt{x} - 2 + \frac{10 - x}{\sqrt{x} + 2}$.

c. $C = \frac{2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x}}{9 - x}$.

d. $D = \sqrt{xy} - \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{1}{xy}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}$

**Bài 3:** Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1\right) : \left(\frac{9 - x}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A < -1$.

**Bài 4:** Cho biểu thức:

$$A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}.$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A = \frac{1}{2}$.

c. Chứng minh rằng $A \leq \frac{2}{3}$.

**Bài 5:** Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm a để $A < 0$.

c. Tìm a để $A = -2$.

**Bài 6:** Chứng minh rằng biểu thức sau là hằng số với mọi giá trị x và y

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} - y} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x}\right) \cdot \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}.$$

**Bài 7:** Giải phương trình:

a. $(\sqrt{x}-3)(4-\sqrt{x})=9-x$.

b. $\dfrac{3}{x+\sqrt{2x^3+1}}+\dfrac{3}{x-\sqrt{2x^3+1}}=0$.

c. $\dfrac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+5}}=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. Ta có: $A=\sqrt{1+2\sqrt{5}+5}-\sqrt{1-2\sqrt{5}+5}=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

$=1+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)=2.$

b. Ta có: $B=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+2.2\sqrt{3}+3}-\sqrt{4-2.2\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}.$

c. Ta có: $C=12\left(\sqrt{\dfrac{2}{6}}+\sqrt{\dfrac{6}{2}}\right)=12\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+12\sqrt{3}=16\sqrt{3}.$

**Bài 2:**

a. Ta có: $A=\dfrac{(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{2+x-1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}.$

b. Ta có: $B=\dfrac{10-x+(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{10-x+x-4}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{6}{\sqrt{x}+2}.$

c. Ta có: $C=\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2(3-\sqrt{x})+(3+\sqrt{x})+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}=\dfrac{6-2\sqrt{x}+3+\sqrt{x}+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}=\dfrac{9}{9-x}.$

**Bài 3:**

a. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ x-9\ne 0\\ \sqrt{x}-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 9\\ x\ne 4\end{cases}.$

Ta có:

$A=\dfrac{x-3\sqrt{x}-(x-9)}{x-9}:\dfrac{9-x+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$

$=\dfrac{-3\sqrt{x}+9}{x-9}:\dfrac{9-x+(x-9)-(x-4)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{-3\sqrt{x}+9}{x-9}:\dfrac{4-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$

$=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+2}.$

b. Để A < −1, ta có:

$$\frac{3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} < -1 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}+3)+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}+3)+x-\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} < 0.$$

Nhận thấy: $x + 2\sqrt{x} + 3 > 0$ và $\sqrt{x} + 2 > 0$

Do đó, $\frac{x+2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le x < 9.$

Vậy, với $0 \le x < 9$, $A < -1$.

**Bài 4:**

a. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 1-\sqrt{x} \ne 0 \\ \sqrt{x}+3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}.$

Ta có:

$$A = \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-7\sqrt{x}+6-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.$$

b. Để $A = \frac{1}{2}$, ta có:

$$\frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(-5\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}+3 \Leftrightarrow -10\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{121}.$$

Vậy, với $x = \frac{1}{121}$, ta được $A = \frac{1}{2}$.

c. Xét hiệu: $\frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{2}{3} = \frac{-15\sqrt{x}+6-2\sqrt{x}-6}{3(\sqrt{x}+3)} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)}.$

Nhận thấy: $3(\sqrt{x}+3) > 0$.

Do đó: $\frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)} \le 0 \Rightarrow A \le \frac{2}{3}.$

**Bài 5:**

a. Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Ta có:

$$A = \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 . \left(\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}\right)$$

$$= \frac{(a-1)^2}{4a} . \left(\frac{a - 2\sqrt{a} + 1 - a - 2\sqrt{a} - 1}{a-1}\right) = \frac{(a-1)^2}{4a} . \frac{-4\sqrt{a}}{a-1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}}.$$

b. Để $A < 0$, ta có: $\frac{a-1}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $0 < a < 1$.

c. Để $A = -2$, ta có:

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}} = -2 \Leftrightarrow a - 1 + 2\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a + 2\sqrt{a} + 1 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a} + 1 = \sqrt{2} \\ \sqrt{a} + 1 = -\sqrt{2} \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Vậy, với $a = (\sqrt{2} - 1)^2$ thì $A = -2$.

**Bài 6:** Ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})}\right) . \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}.$$

$$= \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x} + (2\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} . \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = 1 \text{ (đpcm)}.$$

**Bài 7:**

a. **Điều kiện:** $x \geq 0$. **Ta có:** $-x + 7\sqrt{x} - 12 = 9 - x \Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9$

b. **Điều kiện:** $\begin{cases} 2x^3 + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x^3 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \\ (1-x)(2x^2 + x + 1) \neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\frac{3}{x + \sqrt{2x^3 + 1}} + \frac{3}{x - \sqrt{2x^3 + 1}} = 0.$

c. Ta có $\frac{\sqrt{4 + x}}{\sqrt{x + 5}} = \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 2}}$.

**CHỦ ĐỀ 7** CĂN BẬC BA – CĂN BẬC N

# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. CĂN BẬC BA**

***Định nghĩa:*** Căn bậc ba của một số a, kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, là một số mà luỹ thừa bậc ba của nó bằng a

$$x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a \text{ (suy ra } (\sqrt[3]{a})^3 = a\text{)}.$$

Tổng quát, với mọi $a \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại $\sqrt[3]{a}$.

- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.

☛ *Chú ý:* Ta đều biết rằng $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ do đó, ta ghi nhận được hai kết quả:

$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} \text{ và } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \text{ với } b \neq 0.$$

**2. CĂN BẬC N**

Căn bậc n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) của một số a là một dãy mà luỹ thừa n bằng a.

***Tổng quát:***

- ***Đối với căn bậc lẻ ($n = 2k + 1$):*** Mọi số đều có một căn bậc lẻ duy nhất. Căn bậc lẻ của số dương là dương, của số 0 là 0, của số âm là âm.

  Kí hiệu: $\sqrt[2k+1]{a}$ là giá trị của căn bậc lẻ.
- ***Đối với căn bậc chẵn ($n = 2k$):*** Số âm không có căn bậc chẵn. Số 0 có căn bậc chẵn là 0. Số dương có hai căn bậc chẵn là hai số đối nhau.

  Kí hiệu: $\sqrt[2k]{a}$ và $-\sqrt[2k]{a}$ (trong đó $\sqrt[2k]{a} \geq 0$) là giá trị của các căn bậc chẵn của một số a không âm.

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

## Vấn đề 1: THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH VỚI CĂN BẬC 3 VÀ BẬC n

**Ví dụ 1:** *Thực hiện phép tính:*

a. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{-3}$.

b. $(\sqrt[3]{-2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi: $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}.18.(-3)} = \sqrt[3]{27} = 3$.

b. Ta biến đổi:

$$(\sqrt[3]{-2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{-2} + 1)[(\sqrt[3]{-2})^2 - \sqrt[3]{-2} + 1]$$
$$= (\sqrt[3]{-2})^3 + 1 = -2 + 1 = -1.$$

☛ *Nhận xét*: Như vậy:

1. Trong lời giải của câu a), chúng ta đã sử dụng kết quả:
$$\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b}\,.\,\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{abc}\,.$$
2. Trong lời giải của câu b), chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức:
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$
Nhớ rằng, ngoài ra ta còn có:
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

**Ví dụ 2:** *Thực hiện các phép tính:*

a. $A = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$.

b. $B = (1 - \sqrt[3]{3})^3 + (1 + \sqrt[3]{3})^3$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:
$$A = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})[(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2] = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3$$
$$= 3 + 2 = 5.$$

b. Ta biến đổi:
$$B = (1 - \sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3})^3 - 3(1 - \sqrt[3]{3})(1 + \sqrt[3]{3})(1 - \sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3})$$
$$= 2^3 - 3[1 - (\sqrt[3]{3})^2].2 = 8 - 6 + 6\sqrt[3]{9} = 2 + 6\sqrt[3]{9}\,.$$

**Ví dụ 3:** *Thực hiện các phép tính:*

a. $A = \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{27}$.     b. $B = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:
$$A = \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{3.3.3.3} - \sqrt[3]{3.3.3} = 0.$$

b. Ta có:
$$B = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt[4]{4 - 2.2\sqrt{3} + 3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$
$$= \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.$$

**Ví dụ 4:** *Chứng minh rằng:* $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}\,.$

✍ *Giải*

Ta có: $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3 = \dfrac{5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5} - 1}{8} = \dfrac{8\sqrt{5} - 16}{8} = \sqrt{5} - 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ (đpcm).

**Ví dụ 5:** *Biết rằng nếu* $a = b$ *thì* $a^3 = b^3$ *và ngược lại* $a^3 = b^3$ *thì* $a = b$. *Chứng minh rằng:* $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, *với* $b \neq 0$.

*Giải*

Ta có: $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \dfrac{(\sqrt[3]{a})^3}{(\sqrt[3]{b})^3} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ ( đpcm).

**Ví dụ 6:** *Tính giá trị của biểu thức:*

$$B = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}}.$$

*Giải*

Để phép biến đổi được gọn ta đặt:

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} \\ b_2 = \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}} \end{cases} \Rightarrow b_1b_2 = \sqrt[3]{1620^2 - 12^2.17457} = 48$$

khi đó:

$$B = b_1 + b_2$$

$$\Leftrightarrow B^3 = (b_1 + b_2)^3 = b_1^3 + b_2^3 + 3b_1b_2(b_1 + b_2)$$

$$= 3240 + 3.48.B = 3240 + 144B$$

$$\Leftrightarrow B^3 - 144B - 3240 = 0 \Leftrightarrow (B - 18)(B^2 + 18B + 180) = 0$$

$$\Leftrightarrow B - 18 = 0 \Leftrightarrow B = 18.$$

Vậy, ta được $B = 18$.

***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của bài toán trên để tính giá trị của biểu thức B chúng ta đã sử dụng phép luỹ thừa trong trường hợp B là tổng của hai biểu thức liên hợp. Phương pháp đó được tổng quát như sau:

Với hai biểu thức liên hợp dạng:

$$M_1 = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} \text{ và } M_2 = \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}}.$$

Khi đó, để tính giá trị của biểu thức $B = M_1 + M_2$ chúng ta thực hiện như sau:

$$B^3 = (M_1 + M_2)^3 = M_1^3 + M_2^3 + 3M_1M_2(M_1 + M_2)$$

$$= a + b\sqrt{c} + a - b\sqrt{c} + 3\sqrt[3]{a^2 - b^2c}.B$$

$$\Leftrightarrow B^3 - 3\sqrt[3]{a^2 - b^2c}.B - 2a = 0. \quad (*)$$

Tới đây, chúng ta thực hiện việc giải phương trình (*) sẽ nhận được giá trị của biểu thức B.

Phương pháp trên được mở rộng tương tự với $B = M_1 - M_2$.

Với kết quả tìm được B = 18, chúng ta thấy ngay ví dụ trên còn có thể được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng B là một số tự nhiên*".

Chúng ta sẽ minh hoạ thêm một bài toán nữa.

**Ví dụ 5:** *Chứng minh rằng số:* $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$

*là một số hữu tỉ.*

✍ *Giải*

Để phép biến đổi được gọn ta đặt: $\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \\ x_2 = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 = \frac{5}{3}$

khi đó:

$$x = x_1 - x_2$$
$$\Leftrightarrow x^3 = (x_1 - x_2)^3 = x_1^3 - x_2^3 - 3x_1x_2(x_1 - x_2) = 6 - 5x$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, ta được x = 1 là số hữu tỉ.

**Ví dụ 6:** *Cho:* $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$.

*Chứng minh rằng với mọi* $a \geq \frac{1}{8}$ *thì x là một số tự nhiên.*

✍ *Giải*

Để phép biến đổi được gọn ta đặt:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \\ x_2 = \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 = \frac{2a-1}{3}$$

khi đó:

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x^3 = (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2a + (1 - 2a)x$$
$$\Leftrightarrow x^3 + (2a - 1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2a) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x + 2a = 0 \end{array}\right..$$

Với giả thiết $a \geq \frac{1}{8}$, ta nhận thấy phương trình $x^2 + x + 2a = 0$ có biệt số $\Delta = 1 - 8a$, do đó:

- Với $a = \frac{1}{8}$ thì $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 1$.
- Với $a > \frac{1}{8}$ thì $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy, với $a \geq \frac{1}{8}$ ta luôn có $x = 1$ là số tự nhiên.

**Ví dụ 7:** *Tính giá trị của biểu thức:*

$$A = x^3 + 15x \text{ tại } x = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}+1)} - \sqrt[3]{5(\sqrt{6}-1)}.$$

*Giải*

Để phép biến đổi được gọn ta đặt:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}+1)} \\ a_2 = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}-1)} \end{cases} \Rightarrow a_1a_2 = \sqrt[3]{25(6-1)} = 5.$$

khi đó:

$$x = a_1 + a_2$$
$$\Leftrightarrow x^3 = (a_1 - a_2)^3 = a_1^3 - a_2^3 - 3a_1a_2(a_1 - a_2) = 10 - 3.5.x = 10 - 15x$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 15x = 10 \Leftrightarrow A = 10.$$

Vậy, ta được $A = 10$.

**Ví dụ 8:** *Với* $|a| > 2$, *hãy rút gọn biểu thức:*

$$P = \sqrt[3]{\frac{a^3 - 3a + (a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a^3 - 3a - (a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}}.$$

*Giải*

Để phép biến đổi được gọn ta đặt:

$$\begin{cases} M_1 = \sqrt[3]{\dfrac{a^3 - 3a + (a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}} \\ M_2 = \sqrt[3]{\dfrac{a^3 - 3a - (a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}} \end{cases} \Rightarrow M_1M_2 = 1.$$

khi đó:

$$P = M_1 + M_2$$
$$\Leftrightarrow P^3 = (M_1 + M_2)^3 = M_1^3 + M_2^3 + 3M_1M_2(M_1 + M_2) = a^3 - 3a + 3P$$
$$\Leftrightarrow P^3 - 3P - a^3 + 3a = 0 \Leftrightarrow (P - a)(P^2 + aP + a^2 - 3) = 0. \quad (*)$$

Với giả thiết $|a| > 2$, ta có:

$$P^2 + aP + a^2 - 3 = \left(P + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(a^2 - 4) > 0$$

do đó, phương trình (*) tương dương với:

$P - a = 0 \Leftrightarrow P = a$.

Vậy, ta được $P = a$.

**Ví dụ 9:** *Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ:*

a. $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$. b. $b = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

*Giải*

d. Ta biến đổi:

$$a^3 = (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{4})^3 + (\sqrt[3]{2})^3) - 3\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) = 6 + 6a$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 6a - 6 = 0. \qquad (*)$$

Số a là số vô tỉ vì giả sử trái lại a là số hữu tỉ thì a phải là số nguyên bởi nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên và hệ số bậc cao nhất bằng 1.

Mặt khác, ta thấy ngay:

$$2 < \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} < 4 \Leftrightarrow 2 < a < 4 \Rightarrow a = 3$$

tuy nhiên, $a = 3$ không phải là nghiệm của phương trình (*).

Điều đó chứng tỏ a là số vô tỉ.

e. Giả sử trái lại b là số hữu tỉ. Ta biến đổi:

$$b^3 = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3) - 3\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$$

$$= 5 + 3\sqrt[3]{6}\,b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6} = \frac{b^3 - 5}{3b}$$ là một số hữu tỉ – Vô lí.

Điều đó chứng tỏ b là số vô tỉ.

***Nhận xét***: Qua lời giải của bài toán trên, chúng ta thấy:

1. Với cả a và b ta đều sử dụng hằng đẳng thức dạng:

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 - 3xy(x + y).$$

2. Trong lời giải của câu a) chúng ta sử dụng kết quả:

"*Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên:*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

*đều là số nguyên* "

3. Ta có được mệnh đề tổng quát sau:

" *Nếu* a *và* b *là các số tự nhiên thì* $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ *hoặc là một số tự nhiên hoặc là một số vô tỉ*"

Thật vậy, dễ dàng kiểm tra được rằng số $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên dạng:

$$(x^3 - a - b)^3 - 27abx^3.$$

Do đó, câu b) có thể được trình bày theo cách sau:

Nhận xét rằng: $\begin{cases} 1 < \sqrt[3]{3} < \dfrac{3}{2} \\ 1 < \sqrt[3]{2} < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} < 3.$

Giữa hai số tự nhiên 2 và 3 không có số tự nhiên nào, do đó suy ra a là số vô tỉ (theo kết quả trên).

4. Chúng ta đã biết các số $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, ... là các số vô tỉ. Tuy nhiên, dựa vào nhận xét thứ 2 chúng ta có thể chứng minh được một kết quả tổng quát hơn được trình bày trong bài toán sau.

**Ví dụ 10:** *Chứng minh rằng nếu* a *và* n *là hai số tự nhiên,* $n \geq 2$ *thì* $\sqrt[n]{a}$ *hoặc là một số nguyên hoặc là một số vô tỉ.*

*Giải*

Giả sử $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên. Dễ thấy $c = \sqrt[n]{a}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $x^n - a$.

Đa thức này nếu có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải là số nguyên. Nhưng theo giả thiết $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên, do đó $\sqrt[n]{a}$ phải là số vô tỉ.

***Chú ý***: Dựa vào kết quả của định lí trên chúng ta mới có thể khẳng định được tính đúng đắn trong lời giải của nhiều bài toán.

**Ví dụ 11:** *Tìm số* $\overline{xyz}$ *biết rằng* $\sqrt[3]{\overline{xyz}} = (x + y + z)^{4^n}$ *với* $n \in \mathbf{N}$.

*Giải*

Chúng ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Với $n \geq 1$ và vì $x \geq 1$ nên:

- Nếu $y = z = 0$ thì:

$$\sqrt[3]{\overline{xyz}} = \sqrt[3]{100} \notin \mathbf{N}$$

trong khi $(x + y + z)^{4^n} \in \mathbf{N}$ – Vô lí.

- Nếu $y + z \geq 1$ thì $x + y + z \geq 2$, suy ra:

$$(x + y + z)^{4^n} \geq 2^4 = 16 > 10 = \sqrt[3]{1000} > \sqrt[3]{\overline{xyz}} \text{ – Vô lí.}$$

Vậy, với $n \geq 1$ không thoả mãn.

*Trường hợp 2*: Với $n = 0$ ta được:

$$\sqrt[3]{\overline{xyz}} = x + y + z \Leftrightarrow \overline{xyz} = (x + y + z)^3. \quad (1)$$

Mặt khác, ta thấy ngay:

$$64 < \overline{xyz} < 1000 \Leftrightarrow 64 < (x + y + z)^3 < 1000$$

$$\Leftrightarrow 4 < x + y + z < 10. \quad (2)$$

Ta có kết quả " *Nếu $a \in N$ thì $a^3$ chia cho 9 có số dư là 0, 1, 8* ", từ đó suy ra:

$(x + y + z)^3$ chia cho 9 có số dư là 0, 1, 8

$\Leftrightarrow \overline{xyz}$ chia cho 9 có số dư là 0, 1, 8

$\Leftrightarrow x + y + z$ chia cho 9 có số dư là 0, 1, 8. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $x + y + z = 8$ hoặc $x + y + z = 9$.

- Với $x + y + z = 8$, suy ra:

$$\overline{xyz} = (x + y + z)^3 = 8^3 = 512 = (5 + 1 + 2)^3 \text{ (thoả mãn).}$$

- Với $x + y + z = 9$, suy ra:

$$\overline{xyz} = (x + y + z)^3 = 9^3 = 729 \neq (7 + 2 + 9)^3 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy, ta được $\overline{xyz} = 512$.

☞ ***Nhận xét***: Lời giải trên đã được trình bày tương đối dài với mục đích giúp các em học sinh khi tham khảo dễ hiểu.

Để lí giải "*Tại sao em lại biết chia hai trường hợp* $n \geq 1$ *và* $n = 0$" chúng ta chỉ cần đánh giá đơn giản, như sau:

$$99 < \overline{xyz} < 1000 \text{ (tốt hơn là } 64 < \overline{xyz} < 1000)$$

$$\Leftrightarrow 4 < \sqrt[3]{\overline{xyz}} < 10 \Leftrightarrow 4 < (x + y + z)^{4^n} < 10.$$

**Ví dụ 12:** *Với mỗi số tự nhiên $k > 0$, chứng minh rằng:*

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k}$$

*luôn viết được dạng $a_k + b_k\sqrt{6}$ với $a_k$, $b_k$ nguyên dương. Tìm hệ thức xác định dãy $(a_k)$, dãy $(b_k)$ với $k = 1, 2, 3, \ldots$ Chứng minh rằng với mọi $k \geq 2$ thì $a_{k-1}.a_{k+1} - 6b_k^2$ là một hằng số.*

✍ *Giải*

a. Ta chứng minh: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k} = a_k + b_k\sqrt{6}$ bằng phương pháp quy nạp.

- Với $k = 1$, mệnh đề đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng với k, ta có:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2(k+1)} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k}(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$
$$= (a_k + b_k\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})$$

Do $\sqrt{6}$ là số vô tỉ nên suy ra:

$$a_{k+1} = 5a_k + 12b_{k+1} = 5a_{k+1} + 12(2a_k + 5b_k)$$
$$= 5a_{k+1} + 12\left(2a_k + 5\frac{a_{k+1} - 5a_k}{12}\right) = 10a_{k+1} - a_k \text{ với } a_1 = 5, a_2 = 49.$$

Tương tự, ta có $b_{k+2} = 10b_{k+1} - b_k$ với $b_1 = 2$, $b_2 = 20$.

Từ đó, các hệ thức truy hồi xác định $(a_k)$, $(b_k)$

b. Từ (1) và (2), ta có: $a_{k-1} = 5a_k - 12b_k$.

Vậy: $a_{k-1}.a_{k+1} - 6b_k^2 = (5a_k - 12b_k)(5a_k + 12b_k) - 6b_k^2 = 25(a_k^2 - 6b_k^2)$

$$= 25(a_k - \sqrt{6}\,b_k)(a_k + \sqrt{6}\,b_k)$$

$$= 25(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{2k}(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k} = 1^{2k} = 1.$$

Như vậy, ta được $a_{k-1}.a_{k+1} - 6b_k^2 = 25, \forall k \geq 2$.

**Ví dụ 13:** *Cho biểu thức:* $A = \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

a. *Tìm x để A có nghĩa.*

b. *Tìm mọi giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.*

✍ *Giải*

a. Để A có nghĩa điều kiện là:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[4]{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[4]{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 1.$$

b. Viết lại A dưới dạng: $A = \dfrac{(\sqrt[4]{x} - 1) - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

Từ đó, muốn A là một số nguyên điều kiện là $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ phải là số nguyên

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 1$ phải là ước của 1 $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 1 = \pm 1$

$\Leftrightarrow x = 16, x = 0$.

Vậy, với x = 16, x = 0 thì A nguyên.

☛ ***Nhận xét***: Câu hỏi hẳn sẽ được đặt ra ở đây là " *Tại sao cần phải sử dụng định lí thì lời giải trên mới chính xác?* ". Để trả lời câu hỏi này các em học sinh hãy bắt đầu lại với trường hợp:

Nếu $\sqrt[4]{x} - 1 = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\sqrt[4]{x} - 1 = \dfrac{1}{3}$ ... thì $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ vẫn là số nguyên, do đó A nguyên.

Vậy, tại sao trong lời giải của ví dụ trên không xét những trường hợp này, rất đơn giản vì "*Nếu x là số tự nhiên thì $\sqrt[4]{x}$ không thể là số hữu tỉ*".

## Vấn đề 2: KHỬ MẪU THỨC CHỨA CĂN BẬC BA

*Phương pháp*

Ta có:

a + b có liên hợp là $a^2 - ab + b^2$ và ngược lại.

a − b có liên hợp là $a^2 + ab + b^2$ và ngược lại.

**Ví dụ 1:** *Khử căn thức ở mẫu:*

a. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.　　　　b. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$.

✍ *Giải*

a. Thực hiện phép nhân liên hợp, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}$$

$$=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

b. Thực hiện phép nhân liên hợp, ta được:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}=\frac{6(\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)}=\frac{6(\sqrt[3]{5}+1)}{5+1}=\sqrt[3]{5}+1.$$

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thực hiện khử căn thức ở mẫu chúng ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp. Tuy nhiên, ta còn có thể trình bày theo phương pháp tách, cụ thể:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3-2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$$

$$=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

## Vấn đề 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC BA

**Ví dụ 1:** *Giải các phương trình sau:*

a. $\sqrt[3]{2x+1}=3$.　　　　b. $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x^2-1}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt[3]{2x+1})^3=3^3 \Leftrightarrow 2x+1=27 \Leftrightarrow 2x=26 \Leftrightarrow x=13.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 13.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt[3]{x+1})^3=(\sqrt[3]{x^2-1})^3 \Leftrightarrow x+1=x^2-1 \Leftrightarrow x+1=(x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = −1 và x = 2.

**Ví dụ 2:** *Giải các phương trình sau:*

a. $x^6-5x^3-24=0$.　　　　b. $\sqrt[3]{2x+1}-1=2x$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^6 + 3x^3 - 8x^3 - 24 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 3) - 8\,(x^3 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3)(\,x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = -3 \\ x^3 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{-3} \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = \sqrt[3]{-3}$ và $x = 2$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{2x+1} = 2x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+1}\,)^3 = (2x + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (2x + 1)^3 \Leftrightarrow (2x + 1)[(2x + 1)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ (2x+1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ 2x + 1 = 1 \\ 2x + 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1/2 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ và $x = -1$.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{8}$.

b. $B = \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{2}$.

b. $C = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{3}$.

**Bài 2:** Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$.

b. $B = (\sqrt[3]{3} - 1)^3 + (\sqrt[3]{3} + 1)^3$.

b. $C = (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$.

c. $D = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\,)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\,)$.

**Bài 3:** Rút gọn các biểu thức:

a. $A = (\sqrt[3]{a} + 1)^3 - (\sqrt[3]{a} - 1)^3$.

b. $B = \dfrac{1+a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1}$.

b. $C = \sqrt[3]{1 - x^3 + 3x(x-1)}$.

**Bài 4:** Giải các phương trình:

a. $2 + \sqrt[3]{x+5} = 0$.

b. $3 - \sqrt[3]{2x-7} = 0$.

c. $\sqrt[3]{x^6 + 6x^4} = x^2 + 2$.

d. $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$.

e. $\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x-5} = 1$.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. Ta có: $A = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{8} = 4 - 10 - 2 = -8$.

b. Ta có: $B = \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{2} = -5 + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 5$.

c. Ta có: $C = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - 3 - \sqrt[3]{3} = -3$.

**Bài 2:**

a. Ta có: $A = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(2+2\sqrt{2}+1)}$

$= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} = \sqrt{2} + 1$.

b. Ta có: $B = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 - 3(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)$

$= (2\sqrt[3]{3})^3 - 6\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9} - 1) = 24 - 18 + 6\sqrt[3]{3} = 6 + 6\sqrt[3]{3}$.

c. Ta có: $C = (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 3 - 1 = 2$.

d. Ta có: $D = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1$.

**Bài 3:**

a. Ta có: $A = [(\sqrt[3]{a} + 1) - (\sqrt[3]{a} - 1)]^3 + 3(\sqrt[3]{a} + 1)(\sqrt[3]{a} - 1)[(\sqrt[3]{a} + 1) - (\sqrt[3]{a} - 1)]$

$= (2)^3 + 6(\sqrt[3]{a^2} - 1) = 2 + 6\sqrt[3]{a^2}$.

b. Ta có: $B = \dfrac{1+a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = \dfrac{(1+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1)}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = 1 + \sqrt[3]{a}$.

c. Ta có: $C = \sqrt[3]{1 - x^3 + 3x(x-1)} = \sqrt[3]{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = \sqrt[3]{(1-x)^3} = 1 - x$.

**Bài 4:**

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt[3]{x+5} = -2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+5})^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow x + 5 = -8 \Leftrightarrow x = -13$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -13$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt[3]{2x-7} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-7})^3 = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 7 = 27 \Leftrightarrow x = 17$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 17$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt[3]{x^6 + 6x^4} = x^2 + 2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^6 + 6x^4})^3 = (x^2 + 2)^3$

$\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 \Leftrightarrow 12x^2 + 8 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt[3]{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 = (x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)[(x-1)^2 - 1] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ (x-1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x = 1$, $x = 2$ và $x = 0$.

**CHỦ ĐỀ 8**

Bài đọc thêm

# SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC HAI

## A. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Chúng ta hẳn đã được làm quen với việc giải phương trình chứa căn bậc hai và thấy rằng có hai phương pháp thường được sử dụng, bao gồm:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Để giúp các em học sinh muốn nâng cao kiến thức của bản thân, ở phần này sẽ trình bày cụ thể hai phương pháp trên.

### 1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta sử dụng các phép biến đổi cơ bản sau:

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0$ với điều kiện f(x), g(x) có nghĩa.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \text{ có nghĩa } \& \ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases},$$

không cần đặt điều kiện $f(x) \geq 0$.

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x), g(x), h(x) \text{ có nghĩa} \\ f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}.$$

Trước tiên, chúng ta xem xét các phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

**Ví dụ 1:** *Giải các phương trình sau*:

a. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+6}$.  b. $\sqrt{4x+2} = \sqrt{x^2+4x+1}$.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2x + 1 = x + 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 \geq 0 \\ 2x + 1 = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 5.

b. Biến đổi tương đương phương trình:

$$\sqrt{4x+2} = \sqrt{x^2+4x+1} \Leftrightarrow 4x+2 = x^2+4x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 \geq 0 \\ 4x+2 = x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), chúng ta lựa chọn điều kiện là $x + 6 \geq 0$ hoặc $2x + 1 \geq 0$ là như nhau về độ phức tạp.
2. Ở câu b), dễ thấy rằng để giảm độ phức tạp chúng ta lựa chọn điều kiện là $4x + 2 \geq 0$.

Nhận xét trên sẽ rất có ích với các phương trình chứa tham số. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

**Ví dụ 2:** *Cho phương trình:* $\sqrt{m-2x} = \sqrt{x-1}$. (1)

a. *Giải phương trình với* m = 5.

b. *Tìm* m *để phương trình có nghiệm.*

✍ *Giải*

Phương trình tương đương với:

$$m - 2x = x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ m-2x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{m+1}{3} \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

a. Với m = 5, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, với m = 5 phương trình có nghiệm x = 2.

b. Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{(I) có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} \geq 1 \Leftrightarrow m + 1 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Vậy, với $m \geq 2$ phương trình có nghiệm.

**Ví dụ 3:** *Tìm* m *để phương trình sau có nghiệm:*

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{2m+x-x^2}.$$

*Giải*

Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$-x^2+3x-2=2m+x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+3x-2\ge 0\\ x=m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 2\\ x=m+1\end{cases}.$$

Do đó để phương trình có nghiệm, điều kiện là: $1 \le m + 1 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$.

Vậy, với $0 \le m \le 1$, phương trình có nghiệm.

**Nhận xét**: Trong trường hợp, việc lựa chọn hai biểu thức điều kiện là $f(x) \ge 0$ hoặc $g(x) \ge 0$ có độ phức tạp như nhau và đều khó giải, khi đó chúng ta sẽ không đi giải bất phương trình điều kiện mà sử dụng phép thử lại.

**Ví dụ 4:** *Giải phương trình* $\sqrt{2x^3-x^2-x+1}=\sqrt{x^3+x^2-1}$.

*Giải*

Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$2x^3-x^2-x+1=x^3+x^2-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ 2x^3-x^2-x+1=x^3+x^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ x^3-2x^2-x+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ (x^2-1)(x-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

**Chú ý**: Như vậy, phương pháp giải các phương trình vô tỉ dạng $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ đã được miêu tả khá chi tiết. Tiếp theo, chúng ta quan tâm tới các phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

**Ví dụ 5:** *Giải phương trình* $\sqrt{x^2+x+2}=3-x$.

*Giải*

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}3-x\ge 0\\ x^2+x+2=(3-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ 7x-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

**Nhận xét**: Trong lời giải của ví dụ trên, việc sử dụng phép bình phương để khử căn chúng ta thu nhận được một phương trình bậc nhất (đã được học cách giải). Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta sẽ nhận được một phương trình bậc cao và khi đó cần vận dụng tốt phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để đưa phương trình về dạng tích.

**Ví dụ 6:** *Giải các phương trình sau:*

a. $x - \sqrt{2x+3} = 0$. b. $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$.

*Giải*

a. Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 1 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x+1)(x-1-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Phương trình tương đương với: $\sqrt{x+1} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 1 = (1-x^2)^2 \quad (*) \end{cases}$

Giải phương trình (*):

$$(x+1) = (x+1)^2(x-1)^2 \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)(x-1)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^3 - x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\ x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Kiểm tra các nghiệm tìm được cho điều kiện $1 - x^2 \ge 0$, ta thu được các nghiệm $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), để giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ chúng ta đã sử dụng phương pháp tách để phân tích đa thức VT về dạng tích, tuy nhiên cách làm hay nhất vẫn là biến đổi về dạng bình phương, cụ thể:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

2. Ở câu b), để giải phương trình (*) chúng ta đã lần lượt sử dụng phép nhóm nhân tử chung, tiếp tới là khai triển đa thức để nhận được nhân tử chung x, và cuối cùng là sử dụng phép biến đổi về dạng bình phương.

**Ví dụ 7:** *Giải phương trình:* $(x+3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $10 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{10}$. (*)

Nhận xét rằng: $x^2 - x - 12 = x^2 - 9 - x - 3 = (x + 3)(x - 4)$

do đó, phương trình được viết lại:

$$(x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4) \Leftrightarrow (x+3)[\sqrt{10-x^2} - (x-4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{10-x^2} - (x-4) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Giải (1), ta được nghiệm $x = -3$, thoả mãn điều kiện (*).
- Giải (2), bằng phép biến đổi tương đương:

$$\Leftrightarrow \sqrt{10-x^2} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 10 - x^2 = (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -3$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên là một dạng mở rộng, chính vì vậy chúng ta cần thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình trước khi đi biến đổi nó.

Tiếp theo, chúng ta quan tâm tới các phương trình dạng:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

và để tránh phải biến đổi một hệ phức tạp, trong nhiều trường hợp chúng ta đi thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình trước.

**Ví dụ 8:** *Giải các phương trình sau:*

a. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$. b. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$. (*)

Phương trình tương đương với:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1})^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(x+1)} + x + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x+1)} = 5 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ (x-2)(x+1) = (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 9x - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, \text{ thoả mãn (*)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Phương trình viết lại dưới dạng: $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\ge 0 \\ 1-2x\ge 0 \\ 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x\le \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ 2x+1\ge 0 \\ (1-x)(1-2x)=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

☛ ***Chú ý***: Nếu các em học sinh thấy cách thực hiện như vậy hơi gò bó thì có thể trình bày như sau:

Điều kiện: $\begin{cases} x+4\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \\ 1-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4\le x\le \dfrac{1}{2}.$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ (1-x)(1-2x)=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

## 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

*Phương pháp dùng ẩn phụ* là việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình đa thức với một ẩn phụ.

Ta có các dạng đặt ẩn phụ thường gặp sau:

1. Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}$ và $f(x)$ ta đặt $t=\sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu $t \ge 0$, khi đó $f(x) = t^2$.
2. Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{g(x)}$ và $\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}=k$ không đổi, ta đặt $t=\sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu $t\ge 0$, khi đó $\sqrt{g(x)}=\dfrac{k}{t}$.
3. Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x).g(x)}$ và $f(x)+g(x)=k$ không đổi, ta đặt $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$, khi đó $\sqrt{f(x).g(x)}=\dfrac{t^2-k}{2}$.

☞ *Chú ý*: Với các phương trình căn thức chứa tham số sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhất thiết ta phải đi tìm *điều kiện đúng* cho ẩn phụ.

Để tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ đối với các phương trình vô tỉ, ta có thể lựa chọn một trong các phương pháp sau:

- Sử dụng tam thức bậc hai, thí dụ:
$$t = \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq 2.$$
- Sử dụng các bất đẳng thức, thí dụ:
$$t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$$
Khi đó:
$$t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 \leq (3 + x + 6 - x)(1 + 1) = 18$$
$$\Rightarrow t \leq 3\sqrt{2}.$$
$$t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 = 3 + x + 6 - x + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \geq 9$$
$$\Rightarrow t \geq 3$$
Vậy, điều kiện cho ẩn phụ t là $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$.

**Ví dụ 1:** *Giải các phương trình:*

a. $4x + \sqrt{2x-1} = 5$.

b. $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được viết lại:
$$2(2x-1) + \sqrt{2x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2 + t - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)[2(t+1) + 1] = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$
Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

b. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:
$$2(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}.$$
Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

ABC

☛ ***Nhận xét***: Chúng ta cũng có thể lựa chọn cách trình bày:

1. Ở câu a), khi đặt $t = \sqrt{2x - 1}$, suy ra: $t^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$.

2. Ở câu b), khi đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, suy ra:
$$t^2 = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = t^2 + 3.$$

**Ví dụ 2:** *Giải phương trình*: $(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$. (*)

Đặt $t = (x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$, suy ra $(x - 3)(x + 1) = t^2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

- Với $t = -3$, ta được:

$$(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{13}, \text{ thoả mãn điều kiện (*)}.$$

- Với $t = -1$, ta được:

$$(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5}, \text{ thoả mãn điều kiện (*)}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$.

☛ ***Chú ý***: Nhiều em học sinh khi thực hiện bài toán trên mắc phải sai lầm

từ phép biến đổi: $(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+1)}$,

đó đương nhiên không phải là phép biến đổi tương đương.

Cần nhớ rằng:

$$(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \begin{cases} \sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{nếu } x - 3 > 0 \\ -\sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{nếu } x - 3 < 0 \end{cases}.$$

**Ví dụ 3:** *Giải phương trình*: $\sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} = 4$.

✍ *Giải*

Điều kiện $x \ge 0$.

Nhận xét rằng:

$$\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}\,.\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \sqrt{(\sqrt{x+9})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$= \sqrt{x+9-x} = \sqrt{9} = 3$$

do đó, nếu đặt $t = \sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$, $t \ge 3$, suy ra:

$$\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}} = \frac{3}{t}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + \frac{3}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{(loại)} \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+9}+\sqrt{x} = 9$$

$$\Leftrightarrow x + 9 + x + 2\sqrt{x(x+9)} = 81$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+9)} = 72 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 72 - 2x \ge 0 \\ 4x(x+9) = (72-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 36 \\ x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 16$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, chúng ta đã trình bày ví dụ minh hoạ cho phương pháp đặt ẩn phụ dạng 2. Tiếp theo, chúng ta sẽ minh hoạ ví dụ sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ dạng 3.

**Ví dụ 4:** *Giải phương trình*: $\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 8\sqrt{(x+3)(1-x)} = 2$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \\ (x+3)(1-x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 1.$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{1-x}$, $t \ge 0$, suy ra:

$$t^2 = x + 3 + 1 - x + 2\sqrt{(x+3)(1-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(1-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 4).$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$t + 8.\frac{1}{2}(t^2 - 4) = 2 \Leftrightarrow 4t^2 + t - 18 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 16 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(4t + 9) = 0 \overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(1-x)} = \frac{1}{2}(2^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ 1 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$ , thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = -3$.

**Ví dụ 5:** *Giải phương trình* $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

*Giải*

Đặt $t = x^2 - 3x + 3$, ta có $t = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ do đó điều kiện cho ẩn phụ t là $t \geq \frac{3}{4}$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$.

**Ví dụ 6:** *Giải phương trình*: $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$.

*Giải*

Điều kiện: $\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$ (*)

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = [(3x - 2) + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} + (x - 1)] - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1})^2 - 6.$$

Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$, $t \geq 1$.

Khi đó: $t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 + x - 1 + 2\sqrt{(3x-2)(x-1)} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)(x-1)} = 6 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x \geq 0 \\ (3x-2)(x-1) = (6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 19x + 34 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$, thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

# B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Chúng ta hẳn đã được làm quen với việc giải bất phương trình chứa căn bậc hai dạng đơn giản và thấy rằng có hai phương pháp thường được sử dụng, bao gồm:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Để giúp các em học sinh muốn nâng cao kiến thức của bản thân, ở phần này sẽ trình bày cụ thể hai phương pháp trên.

## 1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta sử dụng các phép biến đổi cơ bản sau:

*Dạng 1:* Với dạng $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \le f(x) < g^2(x) \end{cases}$

*Dạng 2:* Với dạng $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

**Ví dụ 1:** *Giải các bất phương trình:*

a. $\sqrt{x-7} > 3$.

b. $\sqrt{2x-1} < 1$.

*Giải*

a. Biến đổi bất phương trình về dạng: $x - 7 > 9 \Leftrightarrow x > 16$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 16$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $\frac{1}{2} \le x < 1$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên chỉ mang tính minh hoạ khởi đầu để chúng ta dần tiếp cận với các bất phương trình vô tỉ phức tạp hơn, vì ở đó bao gồm nhiều bất phương trình bậc cao.

**Ví dụ 2:** *Giải bất phương trình*: $\sqrt{2(x^2-1)} \le x + 1$.

✍ *Giải*

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 0\le 2(x^2-1)\le (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2-1\ge 0 \\ 2(x^2-1)\le (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ |x|\ge 1 \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ |x|\ge 1 \\ (x+1)(x-3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ |x|\ge 1 \\ -1\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 1\le x\le 3 \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là tập $\{-1\}\cup[1;\,3]$.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên, để nhận được các nghiệm của một bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử rồi lập bảng xét dấu.

**Ví dụ 3:** *Giải các bất phương trình:*

a. $\sqrt{x^2-3}>x-1$.  b. $\sqrt{-x^2+4x-3}>2x-5$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1<0 \\ x^2-3\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-3>(x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ |x|\ge\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1 \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -\sqrt{3} \\ x>2 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(-\infty;\,-\sqrt{3})\cup(2;\,+\infty)$.

b. Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-5<0 \\ -x^2+4x-3\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ -x^2+4x-3>(2x-5)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{5}{2} \\ 1\le x\le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 5/2 \\ 5x^2-24x+28<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le x<\dfrac{5}{2} \\ \begin{cases} x\ge\dfrac{5}{2} \\ 2<x<\dfrac{14}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le x<\frac{14}{5}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $1\le x<14/5$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, với bất phương trình dạng $\sqrt{f(x)} > g(x)$ chúng ta thường phải giải một hệ gồm nhiều bất phương trình. Để tránh việc sai sót khi kết hợp nghiệm, chúng ta có thể trình bày theo kiểu chia trường hợp, cụ thể với câu a), ta xét:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Khi đó, ta chỉ cần: $x^2 - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 3 \Leftrightarrow |x| \ge \sqrt{3}$.

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được $x \le -\sqrt{3}$.

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó, ta bình phương hai vế:

$$x^2 - 3 > (x-1)^2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2, \text{ thoả mãn trường hợp.}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \le -\sqrt{3}$ hoặc $x > 2$.

**Ví dụ 4:** *Giải bất phương trình* $\sqrt{\left|\frac{1}{4} - x\right|} \ge x + \frac{1}{2}$.

✍ *Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}\le 0 \\ \begin{cases} x+\frac{1}{2}>0 \\ \left|\frac{1}{4}-x\right|\ge\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1/2 \\ \begin{cases} x>-1/2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}-x\ge\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge\frac{1}{4} \\ x-\frac{1}{4}\ge\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1/2 \\ \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\frac{1}{4} \\ x^2+2x\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge\frac{1}{4} \\ x^2+\frac{1}{2}\le 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \le 0$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \le 0$.

☛ **Yêu cầu**: Các em học sinh hãy trình bày lại ví dụ trên theo kiểu chia trường hợp.

**Ví dụ 5:** *Giải các bất phương trình*:

a. $\sqrt{x+3} \ge \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$.   b. $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4x-1} \le 3\sqrt{x}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2x-8\ge 0 \\ 7-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le x \le 7.$   (*)

Bất phương trình tương đương với:

$$(2x-8)+(7-x)+2\sqrt{(2x-8)(7-x)}\le x+3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-8)(7-x)}\le 2 \Leftrightarrow x^2-11x+30\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 6 \\ x\le 5 \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $\left[\begin{array}{l} 4\le x\le 5 \\ 6\le x\le 7 \end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $[4, 5]\cup[6, 7]$.

b. **Điều kiện:** $\begin{cases} 5x+1\ge 0 \\ 4x-1\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{4}$. (*)

Bất phương trình tương đương với:

$$3\sqrt{x}+\sqrt{4x-1}\ge\sqrt{5x+1} \Leftrightarrow 9x+(4x-1)+6\sqrt{x(4x-1)}\ge 5x+1$$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x(4x-1)}\ge 1-4x$ luôn đúng bởi (*).

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x\ge\dfrac{1}{4}$.

**Ví dụ 6:** *Giải các bất phương trình:*

a. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3.$ b. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}-1}>2x+2.$

✍ *Giải*

a. **Điều kiện:** $\begin{cases} 1-4x^2\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1/2\le x<0 \\ 0<x\le 1/2 \end{array}\right..$

*Cách 1*: Thực hiện phép nhân liên hợp:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{1-4x^2})(1+\sqrt{1-4x^2})}{x}<3(1+\sqrt{1-4x^2})$$

$$\Leftrightarrow 4x<3+3\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2}>4x-3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-3<0 \\ 1-4x^2\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-3\ge 0 \\ 9(1-4x^2)>(4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{3}{4} \\ |x|<\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{4} \\ 9(1-4x^2)>(4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \xleftrightarrow{x\ne 0} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\le x<0 \\ 0<x\le\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

*Cách 2*: Xét hai trường hợp dựa trên điều kiện.

- Với $-\frac{1}{2} \le x < 0$, bất phương trình tương đương:

$$\sqrt{1-4x^2} < 1 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x > 0 \\ 1-4x^2 < (1-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $-\frac{1}{2} \le x < 0$.

- Với $0 < x \le \frac{1}{2}$, bất phương trình tương đương: $\sqrt{1-4x^2} > 1 - 3x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-3x < 0 \\ 1-4x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-3x \ge 0 \\ 1-4x^2 > (1-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ 0 < x \le \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $0 < x \le \frac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

b. Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le 2x + 1 \ne 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \ne 0.$ (*)

Trục căn thức, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x+1} + 1 > 2x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > 2x + 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{2} < x < 0$.

☛ ***Chú ý***:

1. Trong cách giải 2 trong câu a) ta đã dựa vào điều kiện của ẩn số để biến đổi tương đương bất phương trình.
2. Ví dụ tiếp theo minh hoạ việc sử dụng hằng đẳng thức để khử dấu căn.

**Ví dụ 7:** *Giải bất phương trình* $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$.

*Giải*

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}>\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}>\frac{3}{2}.$$

Điều kiện $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$. (*)

Khi đó, bất phương trình trở thành:

$$\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x-1}-1\ge 0\\ 2\sqrt{x-1}>3/2\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x-1}-1<0\\ 2>3/2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow \forall x.$$

Kết hợp với điều kiện (*) được $x\ge 1$ là nghiệm của bất phương trình.

☛ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên bằng việc thêm bớt 1 vào các biểu thức trong căn, chúng ta đã nhận ra được rằng các biểu thức đó có dạng $A^2$ để rồi $\sqrt{A^2}=|A|$, tuy nhiên sẽ có những biểu thức như vậy nhưng dưới dạng có ẩn hơn, ví dụ: $x\pm\sqrt{2ax-a^2}$ các em học sinh hãy thực hiện việc biến nó về dạng $A^2$.

**Ví dụ 8:** *Giải bất phương trình*:

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}.$$

*Giải*

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-3x+2\ge 0\\ x^2-4x+3\ge 0\\ x^2-5x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ x\le 1\end{array}\right.$.

*Trường hợp 1:* Với $x\ge 4$ thì bất phương trình được biến đổi:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}\ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-4}\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}\ge\sqrt{x-4}-\sqrt{x-3},$$

luôn đúng vì với $x\ge 4$ ta được VT > 0 và VP < 0.

Vậy, $x\ge 4$, là nghiệm bất phương trình.

*Trường hợp 2:* Với $x\le 1$ thì bất phương trình được biến đổi:

$$\sqrt{(1-x)(2-x)}+\sqrt{(1-x)(3-x)}\ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$$

Với $x=1$, bất phương trình nghiệm đúng.

Với $x<1$, bất phương trình có dạng

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}\ge 2\sqrt{4-x}\Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{4-x}\ge\sqrt{4-x}-\sqrt{3-x}$$

Nhận xét rằng với $x < 1$ thì VT $< 0$ và VP $> 0$, bất phương trình vô nghiệm.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x \ge 4$.

☛ ***Chú ý***:

1. Không được nhầm lẫn $\sqrt{xy} = \sqrt{x}.\sqrt{y}$.

   Nên nhớ rằng, điều trên chỉ đúng khi x, y ≥ 0, còn với x, y < 0 thì $\sqrt{xy} = \sqrt{-x}.\sqrt{-y}$.

2. Phép nhân liên hợp trong nhiều trường hợp tỏ ra rất hiệu quả.

## 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

**Ví dụ 1:** *Giải bất phương trình*: $(x - 1)\sqrt{2x-1} \le 3(x - 1)$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$. (*)

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \ge 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$[\frac{1}{2}(t^2+1) - 1]t \le 3[\frac{1}{2}(t^2+1) - 1] \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + 3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t - 1)(t - 3) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2x-1} \le 3$$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 5$.

☛ ***Chú ý***:

1. Ta không thể bình phương hai vế của bất phương trình ban đầu vì chưa khẳng định được dấu của hai vế.
2. Hoàn toàn có thể sử dụng phép biến đổi tương đương để thực hiện ví dụ trên, cụ thể:

$$(x-1)(\sqrt{2x-1} - 3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ \sqrt{2x-1} - 3 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ \sqrt{2x-1} - 3 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ \sqrt{2x-1} \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{2x-1} \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ 0 \le 2x - 1 \le 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ 2x - 1 \ge 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 5.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 5$.

**Ví dụ 2:** *Giải bất phương trình*: $(x + 1)(x + 3) \le -\sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

✍ *Giải*

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(x^2+4x+3)+\sqrt{x^2+4x+5}\le 0 \Leftrightarrow (x^2+4x+5)+\sqrt{x^2+4x+5}-2\le 0$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4x+5}$, $t\ge 1$. Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t^2+t-2\le 0 \Leftrightarrow -3\le t\le 1 \Rightarrow 0\le t\le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+5}\le 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4\le 0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x=-2$.

**Ví dụ 3:** *Cho bất phương trình:* $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}+4.$ (1)

✍ *Giải*

Điều kiện $x>0$. (*)

Viết lại phương trình dưới dạng: $5\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)<2\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)+4.$ (2)

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\overset{\text{Côsi}}{\ge}2\sqrt{\sqrt{x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$, vậy điều kiện là $t\ge\sqrt{2}$.

(**)

Ta suy ra: $t^2=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2=x+\dfrac{1}{4x}+1\Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}=t^2-1.$

Khi đó bất phương trình có dạng: $5t<2(t^2-1)+4\Leftrightarrow 2t^2-5t+2>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t>2\\ t<1/2\end{array}\right. \overset{(**)}{\Leftrightarrow} t>2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>2.$$

Đặt $X=\sqrt{x}$, $X>0$, khi đó: $X+\dfrac{1}{2X}>2\Leftrightarrow 2X^2-4X+1>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\ X<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{x}<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\\ 0<x<\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $\left(0,\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2},+\infty\right)$.

**Ví dụ 4:** *Giải bất phương trình:* $x+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}>3\sqrt{5}$. (1)

✍ *Giải*

Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |x| > 2.$ (*)

*Trường hợp 1* : Với $x < -2$, bất phương trình vô nghiệm (do vế trái âm).

*Trường hợp 2* : Với $x > 2$, bình phương 2 vế phương trình (1) ta được :

$$x^2 + \frac{4x^2}{x^2-4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-4} + 4.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45. \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $t > 0$. Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 25 \\ x^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > 5 \\ |x| < \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được nghiệm của bất phương trình là:

$(2, \sqrt{5}) \cup (5, +\infty).$

**Ví dụ 5:** *Giải bất phương trình* $\sqrt{x} > 1 + \sqrt[3]{x-1}$. (1)

✍ *Giải*

Điều kiện $x \geq 0.$ (*)

Ta có: (1) $\xleftrightarrow{x>0 \to 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x > (1 + \sqrt[3]{x-1})^2 \Leftrightarrow x > 1 + 2\sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2$

$\Leftrightarrow x - 1 - (\sqrt[3]{x-1})^2 - 2\sqrt[3]{x-1} > 0.$ (2)

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0} t > -1.$

Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$t^3 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 2) > 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) > 0$

$$\xleftrightarrow{t+1>0} t(t-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 > 8 \\ x - 1 < 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

CHƯƠNG II – HÀM SỐ BẬC NHẤT

**CHỦ ĐỀ 1**

# NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ**

*Một hàm số f từ tập hợp số X đến tập hợp số Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một và chỉ một giá trị $y \in Y$. Kí hiệu là f(x), x là biến số, y = f(x) là giá trị của hàm số f tại x.*

**2. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ**

***Định nghĩa**: **Tập xác định** của hàm số là tập hợp các giá trị của x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.*

Xuất phát từ định nghĩa trên ta có quy tắc:

*Muốn tìm tập xác định của hàm số y = f(x) ta phải đi tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.*

**3. HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN**

1. ***Hàm số đồng biến**: Hàm số y = f(x) là đồng biến trong khoảng (a ; b) nếu với mọi $x_1$, $x_2$ thuộc khoảng (a ; b) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.*
2. ***Hàm số nghịch biến**: Hàm số y = f(x) là nghịch biến trong khoảng (a ; b) nếu với mọi $x_1$, $x_2$ thuộc khoảng (a ; b) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*

☛ ***Chú ý***: Trong định nghĩa trên, nếu (a; b) là tập xác định của hàm số, ta nói rằng hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Vấn đề 1: SỰ XÁC ĐỊNH MỘT HÀM SỐ**

*Phương pháp*

Muốn xét xem mối quan hệ f từ tập X vào tập Y có phải là hàm số không, chúng ta thường sử dụng định nghĩa hàm số để đưa ra lời kết luận.

**Ví dụ 1:** *Cho* f *là một quan hệ từ tập* **R** *đến tập* **R**. *Hỏi* f *có phải là hàm số không, nếu:*

a. *Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:*

| x | –4 | –2 | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –9 | –5 | –1 | 1 | 5 | 9 | 13 |

b. *Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:*

| x | –6 | –2 | –1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 8 | 4 | 2 | –1 | 1 | 6 | 8 |

c. *Có công thức* $y^2 = 4x$.

✍ *Giải*

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng.

b. Không là hàm số, vì với x = 1 ta xác định được hai giá trị khác nhau của f(x) là 1 và 6.

c. Không là hàm số, vì với x = 4 ta được $y^2 = 4.4 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$

tức là, với x = 4 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và – 4.

**Ví dụ 2:** *Cho hàm số* $y = f(x)$ *được cho bởi công thức* $f(x) = |2x - 3|$.

a. *Tính* $f(-2)$, $f(8)$.

b. *Tính các giá trị của* x *ứng với* $y = -1$, $y = 3$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$f(-2) = |2(-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7,$$

$$f(8) = |2x - 3| = |2.8 - 3| = |16 - 3| = 13.$$

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -1$ thì: $|2x - 3| = -1$, vô nghiệm bởi $|2x - 3| \geq 0$.
- Với $y = 3$ thì: $|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

**Ví dụ 3:** *Cho hàm số* $y = 3x - 1$. *Tìm các giá trị của* x *sao cho*:

a. y *nhận giá trị âm.*

b. y *nhận giá trị lớn hơn* 5.

✍ *Giải*

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là: $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Vậy, với $x < \frac{1}{3}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 5 điều kiện là: $3x - 1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$.
Vậy, với x > 2 thì y nhận giá lớn hơn 5.

**Vấn đề 2: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ**

*Phương pháp*

Để tìm tập xác định của hàm số y = f(x), ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

***Phương pháp 1.*** Tìm tập D của x để f(x) có nghĩa, tức là tìm:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

***Phương pháp 2.*** Tìm tập E của x để f(x) không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là D = R\E.

☛ ***Chú ý***: Thông thường f(x) cho bởi biểu thức đại số thì:

1. Với $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ điều kiện là $\begin{cases} f_1(x), f_2(x) \text{ có nghĩa} \\ f_2(x) \neq 0 \end{cases}$.

2. Với $f(x) = \sqrt[2k]{f_1(x)}$ $(k \in \mathbb{Z})$ điều kiện là $\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa} \\ f_1(x) \geq 0 \end{cases}$.

**Ví dụ 1:** *Tìm tập xác định của các hàm số sau:*

a. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.  b. $y = \frac{x}{x^2 - 2x}$.

✍ *Giải*

a. Hàm số xác định khi $x^2 + 1 \neq 0$ luôn đúng.
Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b. Hàm số xác định khi:

$$x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.

☛ ***Nhận xét***:

1. Các hàm số trong câu a), b) đều có tử số luôn có nghĩa, do đó chỉ cần thiết lập điều kiện cho MS $\neq 0$.
2. Trong câu b), nếu các em học sinh biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \frac{1}{x-2}.$$

rồi khẳng định hàm số xác định khi : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$
và do đó tập $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Đây là lời giải sai vì phép biến đổi hàm số không phải là phép biến đổi tương đương.

**Ví dụ 2:** *Tìm tập xác định của các hàm số sau:*

a. $y = \sqrt{2 - x}$.  b. $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x}$.

✍ *Giải*

a. Hàm số xác định khi: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$
Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 3 + x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-3; 6]$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên đã minh họa việc tìm tập xác định của hàm số có chứa căn bậc hai dạng đơn giản (gồm việc giải các bất phương trình bậc nhất). Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa cho các biểu thức phức tạp hơn, và ở đây chúng ta cần sử dụng:

- Tính chất :

$$A.B \ge 0 \Leftrightarrow \text{A, B cùng dấu.}$$
$$A.B \le 0 \Leftrightarrow \text{A, B trái dấu.}$$

- Hoặc lập bảng xét dấu.

**Ví dụ 3:** *Tìm tập xác định của các hàm số sau:*

a. $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.   b. $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

*Giải*

a. Hàm số xác định khi:

$$-x^2 + 4x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \le 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\le 0\\ x-3\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ x\ge 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [1; 3]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ (x-1)(x-2)\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\le 0\\ x-2\le 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ x\le 2\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ -1\le x\le 1\end{array}\right..$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để giải các bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử và vận dụng các điều kiện để $A.B \ge 0$, $A.B \le 0$.

Các em học sinh hãy kiểm tra lại kết quả đó bằng việc lập bảng xét dấu.

**Ví dụ 4:** *Tìm tập xác định của các hàm số sau:*

a. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{|x| - 4}$.

b. $y = \sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$.

*Giải*

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x \ge 0 \\ |x| - 4 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x - 4 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \ne 4.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [0, +\infty)\backslash\{4\}$.

b. Biến đổi tương đương hàm số về dạng:

$$y = \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 2} + 1} + \sqrt{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x + 2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{1 - x^2} + 1)^2}$$

$$= \left|\sqrt{x + 2} + 1\right| + \left|\sqrt{1 - x^2} + 1\right| = \sqrt{x + 2} + \sqrt{1 - x^2} + 2.$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 1 - x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ (1 - x)(1 + x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ 1 + x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x \le 0 \\ 1 + x \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le -1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1]$.

***Nhận xét***: Như vậy:

1. Trong lời giải của câu a), ngoài điều kiện để MS $\ne 0$ chúng ta còn cần tới điều kiện để $\sqrt{x}$ có nghĩa. Và trong hệ bất phương trình điều kiện, sở dĩ ta có biến đổi $|x| - 4 \ne 0 \Leftrightarrow x - 4 \ne 0$ là do điều kiện ở trên ta có $x \ge 0$.
2. Trong lời giải của câu a), với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thiết lập ngay điều kiện có nghĩa là: $\begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 3 + 2\sqrt{x + 2} \ge 0 \\ 2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \ge 0 \end{cases}$.

**Ví dụ 5:** *Tìm tập xác định của các hàm số sau:*

a. $y = \sqrt{x - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$.  b. $y = \dfrac{\sqrt{4 - x}}{(x - 3)\sqrt{x - 1}}$.

*Giải*

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (x - 3)(x + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 3)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \neq 3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x \leq 4 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1; 4] \setminus \{3\}$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, đối với các biểu thức $x^2 - 9$ và $x - 1$ ngoài điều kiện để nó có nghĩa trong căn bậc hai chúng ta còn ghép thêm điều kiện để nó có nghĩa khi là mẫu của một hàm phân thức, do đó phải thiết lập $x^2 - 9 > 0$ và $x - 1 > 0$.

**Ví dụ 6:** *Cho hàm số:* $y = \dfrac{x+1}{x-m+2}$.

*Tìm* m *để hàm số xác định trên* $[-1; 1)$.

✍ *Giải*

Hàm số xác định khi: $x - m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m - 2$.

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\setminus\{m - 2\}$.

Để hàm số xác định trên $[-1, 1)$ điều kiện là:

$$m-2 \notin [-1, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2<-1 \\ m-2 \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Ví dụ 7:** *Cho hàm số:* $y=\dfrac{x+1}{x^2-2(m-1)x+m^2-2m}$.

*Tìm* m *để hàm số xác định trên* $(0, 1)$.

✍ *Giải*

Hàm số xác định khi:

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-m \neq 0 \\ x-m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq m-2 \end{cases}.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\setminus\{m - 2, m\}$.

Để hàm số xác định trên $(0, 1)$ điều kiện là:

$$m-2, m \notin (0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m-2 \geq 1 \\ m-2 \leq 0<1 \leq m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 3 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để m – 2, m ∉ (0, 1) ta xác định được ba trường hợp là do đánh giá được m – 2 < m với mọi m, từ đó thiết lập:

- Hai điểm m – 2 và m nằm bên trái (0, 1) và trong trường hợp này chỉ cần $m \le 0$.
- Hai điểm m – 2 và m nằm bên phải (0, 1) và trong trường hợp này chỉ cần $m - 2 \ge 0$.
- Điểm m – 2 nằm bên trái (0, 1) và điểm m nằm bên phải (0, 1) vì khoảng cách giữa hai điểm m – 2 và m bằng 2 đơn vị.

**Ví dụ 8:** *Cho hàm số*: $y = \sqrt{-x + 2m - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x - m + 2}}$.

*Tìm* m *để hàm số xác định trên* (0; 1].

✍ *Giải*

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} -x + 2m - 1 \ge 0 \\ x - m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2m - 1 \\ x > m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m - 2 < x \le 2m - 1.$$

Do đó tập xác định của hàm số là D = (m – 2, 2m – 1].

Để hàm số xác định trên (0, 1] điều kiện là:

$$(0, 1] \subseteq (m - 2, 2m - 1] \Leftrightarrow m - 2 \le 0 < 1 \le 2m - 1 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2.$$

Vậy, với $1 \le m \le 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Vấn đề 3: XÉT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ**

***Phương pháp***

**Để xét tính chất biến thiên của hàm số y = f(x) trong (a; b), ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:**

***Phương pháp 1:*** **Sử dụng định nghĩa.**

***Phương pháp 2:*** **Thực hiện theo các bước:**

***Bước 1:*** **Lấy $x_1, x_2 \in (a; b)$ với $x_1 \ne x_2$ ta thiết lập tỉ số: $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.**

***Bước 2:*** **Khi đó:**

- **Nếu A > 0 với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \ne x_2$ thì hàm số đồng biến trong (a; b).**
- **Nếu A < 0 với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \ne x_2$ thì hàm số nghịch biến trong (a; b).**

**Ví dụ 1:** *Xét sự biến thiên của hàm số*: y = f(x) = x – 2.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

*Cách 1*: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - 2) - (x_2 - 2) = x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

*Cách 2*: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - 2) - (x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = 1 > 0.$$

Vậy, hàm số đồng biến trên **R**.

☛ **Tổng quát**: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = ax + b$, với $a \neq 0$.

✍ *Giải*

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = a.$$

Khi đó:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

**Ví dụ 2:** *Xét sự biến thiên của hàm số:* $y = f(x) = x^2$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

*Cách 1*: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ (tức là $x \in (0; +\infty)$) thì:

  $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  $\Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong $(0; +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ (tức là $x \in (-\infty; 0)$) thì:

  $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  $\Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 0)$.

*Cách 2*: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có: $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$.

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

☞ **Tổng quát**: Hàm số: $y = f(x) = ax^2$, với $a \neq 0$.

ta có:

1. Với $a > 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.
2. Với $a < 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$.

**Ví dụ 3:** *Xét sự biến thiên của hàm số*: $y = f(x) = -x^3$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

*Cách 1*: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^3) - (-x_2^3) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

*Cách 2*: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1^3) - (-x_2^3)}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2}$$

$$= -\frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} = -(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < 0.$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên **R**.

**Tổng quát**: *Xét sự biến thiên của hàm số*: $y = f(x) = ax^3$, *với* $a \neq 0$.

✍ *Giải*

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^3 - ax_2^3}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$= a(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2).$$

Khi đó:

- Nếu a > 0 thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu a < 0 thì hàm số nghịch biến trên **R**.

**Ví dụ 4:** *Xét sự biến thiên của hàm số*: $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ *trong* $(0; +\infty)$.

*Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

*Cách 1*: Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1})(\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1})}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}}$$

$$= \frac{(x_1^2+1) - (x_2^2+1)}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

*Cách 2*: Với $x_1, x_2 \in (0 ; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^2+1) - (x_2^2+1)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1})} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} > 0$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

***Chú ý***: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 + x_2 > 0$.

**Ví dụ 5:** *Xét sự biến thiên của hàm số*: $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ *trong* $(1; +\infty)$.

*Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

*Cách 1*: Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_2 - 1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} > 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong $(1; +\infty)$.

*Cách 2*: Với $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{x_1}{x_1 - 1} - \dfrac{x_2}{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

☛ ***Chú ý***: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0$.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho $X = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

| x | − 3 | − 2 | − 1 | 0 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | − 6 | − 4 | − 2 | 0 | 6 |

**Bài 2:** Cho $X = \{-4, 3, 5, 7\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

| x | − 4 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| y | 8 | 8 | 8 | 8 |

**Bài 3:** Cho $X = \{-4, -2, 0\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

| x | − 4 | − 4 | − 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| y | 4 | 12 | 6 | 1 |

**Bài 4:** Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \dfrac{36}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

| x | − 9 | − 6 | 3 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|
| y = f(x) | | | | | 1 |

b. Xác định f( −12), f(72).

**Bài 5:** Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức f(x) = 2x + 9.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

| x | − 3 | − 1 | 2 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| y = f(x) | | | | | 27 |

b. Xác định f(−8), f(7).

**Bài 6:** Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

a. Tính f(−4), f(−2), f(0), f(1), f(5).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = − 8, y = − 5, y = 0, y = − 10.

**Bài 7:** Cho hàm số y = 2x − 6. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị dương.

b. y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

**Bài 8:** Cho hàm số $y = 6 - 5x$. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 1.

**Bài 9:** Cho các hàm số: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ và $g(x) = x^2 - 1$.

a. Tính $f(-1)$ và $g(\frac{1}{2})$.

b. Tìm số a để $f(a) = g(a)$

**Bài 10:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.    b. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 3}$.

**Bài 11:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x - 1}{2x - 6}$.    b. $y = \dfrac{2x + 1}{2x^2 - x - 1}$.

**Bài 12:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x + 2}$.    b. $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{7 + x}$.

**Bài 13:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$.    b. $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

**Bài 14:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{1 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.    b. $y = \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$.

**Bài 15:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x|x| - 1}}$.    b. $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt[3]{x + 1}}$.

**Bài 16:** Cho hàm số: $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Tính $f(4 + 2\sqrt{3})$, $f(a^2)$ với $a < -2$.

c. Tìm x để $f(x) = \sqrt{3}$.

d. Tìm x để $f(x) = f(x^2)$.

**Bài 17:** Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 2m + 1}$ xác định trên $[0; 1)$:

**Bài 18:** Tìm m để hàm số sau xác định trên $(1; 3)$:

$$y = \sqrt{-x + 2m - 1} - \frac{1}{\sqrt{2x - m}}.$$

**Bài 19:** Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x + 3$.

b. $y = f(x) = 1 - 3x$.

c. $y = f(x) = (m^2 + 1)x - 2$.

d. $y = f(x) = mx + 4$, với $m \neq 0$.

**Bài 20:** Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x^2$ trong $(0; +\infty)$.

b. $y = f(x) = -6x^2$ trong $(0; +\infty)$.

c. $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$.

d. $y = f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

**Bài 21:** Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ trong $(1; +\infty)$.

b. $y = f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$ trong $(-\infty; -2)$.

**Bài 22:** Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \sqrt{x-1}$.

b. $y = f(x) = \sqrt{2-x}$.

**Bài 23:** Xét sự biến thiên của các hàm số:

c. $y = f(x) = \sqrt{x^2+3}$ trong $(0; +\infty)$.

d. $y = f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$ trong $(-\infty; -2)$.

**Bài 24:** Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 3x^3$.

b. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$.

c. $y = f(x) = x^3 + x + 1$.

d. $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** Có là hàm số.

**Bài 2:** Có là hàm số và đây là hàm hằng $y = 8$.

**Bài 3:** Không là hàm số, vì với $x = -4$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và 12.

**Bài 4:**

a. Ta có được kết quả:

| x | $-9$ | $-6$ | 3 | 12 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = \dfrac{36}{x}$ | $-4$ | $-6$ | 12 | 3 | 1 |

b. Ta có $f(-12) = -3$, $f(72) = \dfrac{1}{2}$.

**Bài 5:** *Học sinh tự làm.*

**Bài 6:**

a. Ta lần lượt có:

$$f(-4) = (-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7,$$
$$f(-2) = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5,$$
$$f(0) = 0 - 9 = -9,\ f(1) = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8,$$
$$f(5) = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16.$$

b. Ta lần lượt có:

- Với y = − 8 thì:

$$x^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -8 + 9 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

- Với y = − 5 thì:

$$x^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5 + 9 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

- Với y = 0 thì:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

- Với y = − 10 thì:

$$x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1, \text{ không tồn tại x.}$$

**Bài 7:**

a. Để y nhận giá trị dương điều kiện là:

$$2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, với x > 3 thì y nhận giá trị dương.

b. Để y nhận giá trị nhỏ hơn 3 điều kiện là:

$$2x - 6 < 3 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}.$$

Vậy, với $x < \frac{9}{2}$ thì y nhận giá nhỏ hơn 3.

**Bài 8:**

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là:

$$6 - 5x < 0 \Leftrightarrow 5x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}.$$

Vậy, với $x > \frac{6}{5}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 1 điều kiện là:

$$6 - 5x > 1 \Leftrightarrow 5x < 5 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy, với x < 1 thì y nhận giá trị lớn hơn 1.

**Bài 9:**

a. Ta có:

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6.$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}.$$

b. Ta có:

$$f(a) = 2a^2 - 3a + 1$$

$$g(a) = a^2 - 1.$$

Suy ra:

$$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a(a-2) - (a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với a = 2 hoặc a = 1 thì f(a) = g(a).

**Bài 10**:

a. Hàm số xác định khi:

$x^2 + 1 \neq 0$, luôn đúng.

Vậy, tập xác định của hàm số là D = **R**.

b. Hàm số xác định khi:

$$x^2 - x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \neq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = **R**.

**Bài 11**:

a. Hàm số xác định khi:

$2x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{3\}$.

b. Hàm số xác định khi:

$$2x^2 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{1, -\frac{1}{2}\}$.

**Bài 12:**

a. Hàm số xác định khi:

$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-2, +\infty)$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 7 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-7, 2]$.

**Bài 13:**

a. Hàm số xác định khi:

$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) \leq 0$

$\Rightarrow 2 \leq x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [2, 3]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x < 0 \\ \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \leq 0 \end{array}\right., \text{ luôn đúng.}$$

Vậy tập xác định của hàm số là **R**.

**Bài 14:**

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ (x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, -2)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5/2 \\ x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq \dfrac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1, \frac{5}{2}] \setminus \{2\}$.

**Bài 15:**

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x|x| - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x.x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x > 1.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1, +\infty)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-2, 2] \setminus \{-1\}$.

**Bài 16:**

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 1.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

b. Ta có:

$$f(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - 1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} + 1}{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1 + 1}{\sqrt{3} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}}.$$

$$f(a^2) = \frac{\sqrt{a^2} + 1}{\sqrt{a^2} - 1} = \frac{|a| + 1}{|a| - 1} \overset{a<-2}{=} \frac{-a + 1}{-a - 1} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

c. **Để $f(x) = \sqrt{3}$, điều kiện là:**

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3}.\sqrt{x} - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}.$$

d. **Để $f(x) = f(x^2)$, điều kiện là:**

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x - 1}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**Bài 17**: Hàm số có nghĩa khi: $x - 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m - 1$.

Để hàm số xác định trên [0, 1) điều kiện là:

$$2m - 1 \notin [0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 1 < 0 \\ 2m - 1 \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{array}\right..$$

**Bài 18**: Hàm số có nghĩa khi: $\begin{cases} -x + 2m - 1 \geq 0 \\ 2x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m - 1 \\ x > \dfrac{m}{2} \end{cases}$.

Để hàm số xác định trên (1, 3) điều kiện là:

$$\frac{m}{2} \leq 1 < 3 \leq 2m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

**Bài 19:**

a. Hàm số đồng biến trên **R**.

b. Hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in$ **R** và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[(m^2 + 1)x_1 - 2] - [(m^2 + 1)x_2 - 2]}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(m^2 + 1)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m^2 + 1 > 0.$$

Vậy, hàm số đồng biến trên **R**.

d. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in$ **R** và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(mx_1 + 4) - (mx_2 + 4)}{x_1 - x_2} = m.$$

Khi đó:

- Nếu $m > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

**Bài 20:**

a. Hàm số đồng biến trong $(0; +\infty)$.

b. Hàm số nghịch biến trong $(0; +\infty)$.

c. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

d. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

**Bài 21**:.

a. Hàm số nghịch biến trên trong $(1; +\infty)$.

b. Hàm số đồng biến trên trong $(-\infty; -2)$.

**Bài 22:**

a. Hàm số có nghĩa khi: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [1; +\infty)$.

Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in [1; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1})(\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1})}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}}$$

$$= \frac{(x_1 - 1) - (x_2 - 1)}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

b. Hàm số có nghĩa khi: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

Với $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2})(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})}$$

$$= \frac{(2 - x_1) - (2 - x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})} = -\frac{1}{\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}} < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

**Bài 23:**

a. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

b. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

**Bài 24:**

a. Hàm số đồng biến trên **R**.

b. Hàm số đồng biến trên **R**.

c. Hàm số đồng biến trên **R**.

d. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1 + 1) - (x_2^3 - 3x_2^2 + 6x_2 + 1)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) + 9] + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 3)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên R.

**CHỦ ĐỀ 2**

# HÀM SỐ BẬC NHẤT

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐỊNH NGHĨA**

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, với $a \neq 0$, trong đó a và b là các số thực xác định.

☛ ***Chú ý:*** Nếu $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ là hàm số biểu thị sự tương quan tỉ lệ thuận.

**2. TÍNH CHẤT**

- Hàm số $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbf{R}$.
- Trong tập xác định **R**, hàm số $y = ax + b$
  - Đồng biến nếu $a > 0$.
  - Nghịch biến nếu $a < 0$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Cho hàm số:* $y = mx - m^2 - x + 1$.

a. *Tìm* m *để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.*

b. *Tìm* m *để hàm số nghịch biến trên* **R**.

c. *Tìm* m *để đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.*

✍ *Giải*

Viết lại hàm số dưới dạng: $y = (m - 1)x - m^2 + 1$.

a. Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi: $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Vậy, với $m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số trên nghịch biến trên **R** khi và chỉ khi: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.
Vậy, với $m < 1$ hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Ta biết gốc toạ độ O(0, 0), do đó đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ khi
$$0 = (m - 1).0 - m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$
Vậy, với $m = \pm 1$ đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.

☛ ***Chú ý:*** Trong lời giải câu c), khi $m = 1$ hàm số không còn là hàm số bậc nhất.

**Ví dụ 2:** *Cho hàm số:* $y = mx - \sqrt{1 - m}$.

a. *Tìm* m *để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.*

b. *Tìm* m *để hàm số đồng biến trên* **R**.

✍ *Giải*

a. Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m \leq 1. \qquad (*)$$
Vậy, với $0 \neq m \leq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số trên đồng biến trên **R** khi: $m > 0$.

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 < m \le 1$.

Vậy, với $0 < m \le 1$ hàm số đồng biến trên **R**.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi chỉ thiết lập điều kiện $m \ne 0$.
- Ở câu b), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi thiết lập điều kiện $m > 0$ nhưng lại không kết hợp với (*).

**Ví dụ 3:** *Cho hàm số*: $y = f(x) = ax$, với $a \ne 0$.

a. *Chứng minh rằng* $f(kx_1) = kf(x_1)$ *và* $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

b. *Các hệ thức trong câu* a) *còn đúng với hàm số*:

$$y = g(x) = ax + b, \text{ với } b \ne 0 \textit{ hay không}?.$$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$f(kx_1) = a(kx_1) = akx_1 = k(ax_1) = kf(x_1)$, đpcm.

$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$, đpcm.

b. Ta lần lượt xét:

- Với hệ thức:

$$g(kx_1) = kg(x_1) \Leftrightarrow a(kx_1) + b = k(ax_1 + b)$$

$$\Leftrightarrow akx_1 + b = akx_1 + bk \Leftrightarrow b(k-1) = 0 \overset{b\ne0}{\Leftrightarrow} k = 1.$$

Vậy, hệ thức $g(kx_1) = kg(x_1)$ chỉ đúng với $k = 0$.

- Với hệ thức:

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b = (ax_1 + b) + (ax_2 + b)$$

$$\Leftrightarrow ax_1 + ax_2 + b = ax_1 + ax_2 + 2b \Leftrightarrow b = 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy, hệ thức $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ không đúng.

**Ví dụ 4:** *Cho hai hàm số*:

$$f(x) = (m^2 + 1)x - 4 \textit{ và } g(x) = mx + 2, \textit{ với } m \ne 0.$$

*Chứng minh rằng*:

a. *Các hàm số* $f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ *là các hàm đồng biến.*

b. *Hàm số* $g(x) - f(x)$ *là hàm nghịch biến.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt xét:

- Hàm số $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 1 > 0$ do đó nó là hàm đồng biến.

- Hàm số:

$$f(x) + g(x) = (m^2 + 1)x - 4 + mx + 2 = (m^2 + m + 1)x - 2.$$

có hệ số:

$$a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

do đó nó là hàm đồng biến.

- Hàm số:

$$f(x) - g(x) = (m^2 + 1)x - 4 - (mx + 2) = (m^2 - m + 1)x - 6.$$

có hệ số:

$$a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

do đó nó là hàm đồng biến.

b. Hàm số:

$$g(x) - f(x) = mx + 2 - [(m^2 + 1)x - 4] = -(m^2 - m + 1)x + 6.$$

có hệ số:

$$a = -(m^2 - m + 1) = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$$

do đó nó là hàm nghịch biến.

**Ví dụ 5:** *Cho hàm số:*

$$y = f(x) = ax + b, \text{ với } a \neq 0.$$

a. *Chứng minh rằng với một giá trị* $x_0$ *tuỳ ý cho trước, bao giờ cũng tìm được hai số* m *và* n *sao cho* $f(m) < f(x_0) < f(n)$.

b. *Chứng minh rằng hàm số bậc nhất không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. Ta biết rằng với mỗi $x_0$ tuỳ ý cho trước, bao giờ cũng có:

$$x_0 - 1 < x_0 < x_0 + 1.$$

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Với a > 0, khi đó hàm số đồng biến, do đó:

$$f(x_0 - 1) < f(x_0) < f(x_0 + 1)$$

từ đó, ta chọn $m = x_0 - 1$ và $n = x_0 + 1$.

*Trường hợp 2*: Với a < 0, khi đó hàm số nghịch biến, do đó:

$$f(x_0 - 1) > f(x_0) > f(x_0 + 1)$$

từ đó, ta chọn $m = x_0 + 1$ và $n = x_0 - 1$.

b. Giả sử trái lại hàm số có:

- Giá trị lớn nhất $f(x_1)$ ứng với $x_1$.
- Giá trị nhỏ nhất $f(x_2)$ ứng với $x_2$.

Theo kết quả câu a), luôn tìm được hai số m và n sao cho:

$f(x_1) < f(n) \Rightarrow f(x_1)$ không phải là giá trị lớn nhất.

$f(x_2) > f(m) \Rightarrow f(x_2)$ không phải là giá trị nhỏ nhất.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Một ôtô vận tốc 50km/h khởi hành từ bến xe phía Nam cách Hà Nội 5km và đi về phía Nghệ An (bến xe nằm trên đường Hà Nội – Nghệ An). Hỏi sau khi khởi hành x giờ, xe cách Hà Nội bao nhiêu?

**Bài 2:** Cho các hàm số:

a. $y = 5x + \sqrt{3}$.

b. $y = 2 - \sqrt[3]{5}\,x$.

c. $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

d. $y = 3(x - 2) + x$.

e. $y = -\frac{1}{x} + 3$.

f. $y = 2\sqrt{x} + 8$.

Trong các hàm số trên hàm số nào là hàm số bậc nhất? Xét sự biến thiên của các hàm số bậc nhất đó.

**Bài 3:** Cho hàm số:

$$y = (m - 1)x + \sqrt{m}.$$

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Bài 4:** Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a. $y = mx + 6$.

b. $y = m^2x + \sqrt{3} - x$.

c. $y = mx + \sqrt{m + 2}$.

d. $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$.

**Bài 5:** Cho hai hàm số:

$$f(x) = (m^2 + 5)x - 3 \text{ và } g(x) = 2mx + 1, \text{ với } m \neq 0.$$

Chứng minh rằng:

a. Các hàm số f(x), f(x) + g(x), f(x) – g(x) là các hàm đồng biến.

b. Hàm số g(x) – f(x) là hàm nghịch biến.

**Bài 6:** Cho hàm số

$$y = (m - 1)x + 2m - 3.$$

a. Tìm m để hàm số là đồng biến, nghịch biến, không đổi.

b. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** Gọi y là khoảng cách từ ôtô tới Hà Nội sau x giờ. Ta có: $y = 50x + 5$.

**Bài 2:**

a. Hàm số $y = 5x + \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 5 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

b. Hàm số $y = 2 - \sqrt[3]{5}\,x$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\sqrt[3]{5} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

c. Hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

d. Hàm số $y = 3(x - 2) + x = 4x - 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 4 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

e. Không là hàm số bậc nhất.

f. Không là hàm số bậc nhất.

**Bài 3:**

a. Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \neq 1. \qquad (*)$$

Vậy, với $0 \leq m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số đã cho nghịch biến trên **R** khi:

$$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 \leq m < 1$.

Vậy, với $0 \leq m < 1$ hàm số nghịch biến trên **R**.

**Bài 4:** a. $m \neq 0$. b. $m \neq \pm 1$. c. $-2 \leq m \neq 0$.

d. Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

**Bài 5:** *Học sinh tự làm.*

**Bài 6:**

a. Ta có:

- Hàm số là đồng biến khi và chỉ khi:

  $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$

- Hàm số là nghịch biến khi và chỉ khi:

  $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$

- Hàm số là hàm hằng khi và chỉ khi:

  $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

b. $M(-2; -1)$.

**CHỦ ĐỀ 3** ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

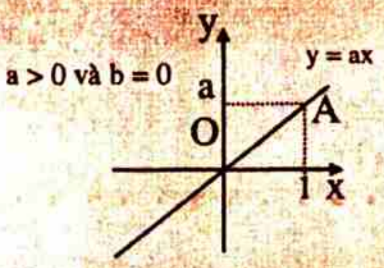
# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

## 1. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax VỚI a ≠ 0

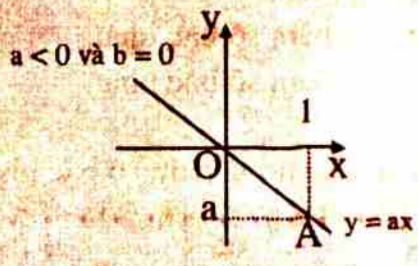
Đồ thị hàm số y = ax (a ≠ 0) là một đường thẳng đi qua gốc độ và điểm A(1; a).
Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số y = ax (a ≠ 0), ta thực hiện:

- Xác định vị trí điểm A(1; a).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = ax.

Ta có minh hoạ:




*Đường thẳng y = ax nằm trong góc phần tư (I) và phần tư (III)*




*Đường thẳng y = ax nằm trong góc phần tư (II) và phần tư (IV)*

☛ ***Chú ý***:

- Đồ thị hàm số y = x chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.
- Đồ thị hàm số y = –x chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

## 2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax + b, a ≠ 0

Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0) là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b. Đường thẳng này

- Song song với đường thẳng y = ax nếu b ≠ 0.
- Trùng với đường thẳng y = ax nếu b = 0.

Từ kết quả trên ta thấy "*Nếu đã có đồ thị hàm số y = ax* " thì đồ thị hàm số y = ax + b (b ≠ 0) được suy ra bằng cách:

- Xác định vị trí điểm M(0, b).
- Đường thẳng qua M song song với đường thẳng y = ax chính là đồ thị hàm số y = ax + b.

## 3. CÁCH VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Vì đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng nên muốn vẽ ta chỉ cần xác định hai điểm phân biệt bất kì trên đường thẳng đó.

> ☛ ***Chú ý***: Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$, $a \neq 0$
>
> - Ta nên chọn hai điểm có toạ độ chẵn.
> - Thông thường, ta chọn hai điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ theo thứ tự là giao điểm của đồ thị với trục Oy và Ox nếu hai điểm đó không nằm quá xa gốc toạ độ (thí dụ $y = x + 2005$) hoặc toạ độ của chúng không quá phức tạp trong tính toán (thí dụ $y = \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt{89}$).

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Cho hàm số*: $y = -x + 3$.

a. *Xác định giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành. Vẽ đồ thị hàm số.*

b. *Gọi* A *và* B *theo thứ tự là hai giao điểm nói trên. Tính diện tích* $\Delta OAB$ (O *là gốc toạ độ*).

c. *Gọi* $\alpha$ *là góc nhọn tạo bởi đồ thị hàm số với trục* Ox. *Tính* $\tan\alpha$, *suy ra số đo góc* $\alpha$.

d. *Bằng đồ thị tìm* x *để* $y > 0$, $y \leq 0$.

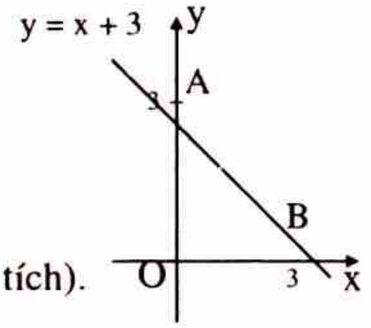
✍ *Giải*

a. Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0; 3)$.

Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3; 0)$.




b. Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.3.3 = \frac{9}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

c. Trong $\Delta OAB$, ta có $\widehat{ABO} = \alpha$, suy ra:

$$\tan\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

d. Từ đồ thị suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow x < 3$, ứng với phần đồ thị phía trên trục Ox.
- $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, ứng với phần đồ thị phía dưới trục Ox.

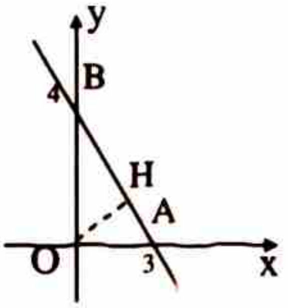
**Ví dụ 6:** *Cho hàm số*: $y = ax - 3a$.

a. *Xác định giá trị của* a *để đồ thị hàm số đi qua điểm* A(0; 4). *Vẽ đồ thị hàm số với* a *vừa tìm được.*

b. *Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng tìm được trong* a).

✍ *Giải*

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(0; 4) khi và chỉ khi:




$$4 = a.0 - 3a \Leftrightarrow 3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy thêm điểm B(3; 0).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

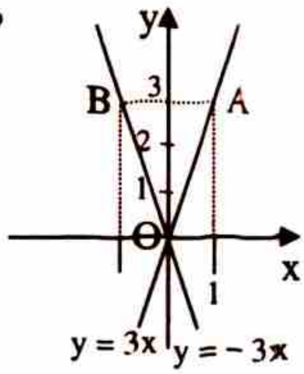
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{4.3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$

Vậy, khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng bằng $\frac{12}{5}$.

**Ví dụ 2:** *Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ* Oxy *đồ thị của các hàm số*

$y = 3x$ và $y = -3x$.

*Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?*




✍ *Giải*

Để vẽ đồ thị hàm số y = 3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1; 3).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 3x.

Để vẽ đồ thị hàm số y = –3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(–1; 3).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số y = – 3x.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy.

☛ ***Nhận xét***:

1. Ta biết rằng:

$$|3x| = \begin{cases} 3x \text{ khi } x \geq 0 \\ -3x \text{ khi } x < 0 \end{cases}.$$

Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:

- Phần đồ thị của hàm số y = 3x trong góc phần tư thứ I.
- Phần đồ thị của hàm số y = – 3x trong góc phần tư thứ II.

ta nhận được đồ thị của hàm số y = |3x|.

2. Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số y = |ax| ta thực hiện như sau:

- Vẽ tia OA, với $A(x_A, ax_A)$, $x_A > 0$.
- Vẽ tia OB, với $B(-x_A; ax_A)$.

hoặc chỉ cần vẽ tia OA sau đó lấy đối xứng OA qua Oy.

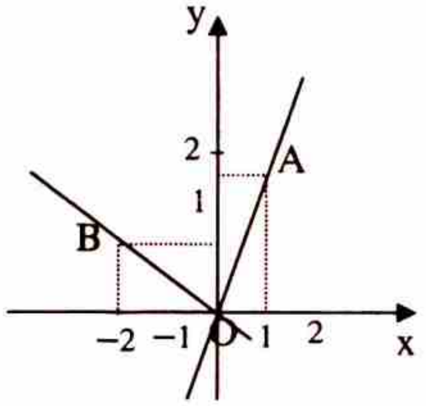
**Ví dụ 3:** *Cho hai hàm số:*

$$y = 2x \text{ và } y = -\frac{1}{2}x.$$

a. *Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số. Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?*

b. *Xác định toạ độ điểm B thuộc đồ thị hàm số* $y = -\frac{1}{2}x$ *sao cho* $x_B = 4y_B + 2$.

*Giải*




a. Để vẽ đồ thị hàm số y = 2x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1; 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 2x.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(– 2; 1).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.

b. B thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, suy ra:

$$y_B = -\frac{1}{2}x_B. \quad (1)$$

Thay $x_B = 4y_B + 2$ vào (1), ta được:

$$y_B = -\frac{1}{2}(4y_B + 2) \Leftrightarrow y_B = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_B = 4(-\frac{1}{3}) + 2 = -\frac{1}{3}.$$

Vậy, điểm $B(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ là điểm cần tìm.

**Ví dụ 4:** *Cho các hàm số:*

$$y = f(x) = 2x,\ y = g(x) = 2x - 1,\ y = h(x) = 2x + 2.$$

a. *Với* x = –2; 0; 1; 2; 3 *hãy tính các giá trị tương ứng* f(x), g(x), h(x).

b. *Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số* f(x), g(x), h(x) *ứng với cùng một giá trị của biến số* x, *từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số* y = g(x) *và* y = h(x).

*Giải*

a. Ta lập bảng:

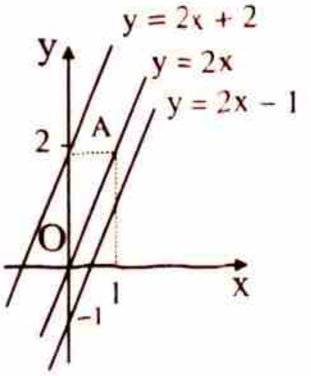
| x | –2 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –4 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| g(x) | –5 | –1 | 1 | 3 | 5 |
| h(x) | –2 | 2 | 4 | 6 | 8 |

b. Từ bảng, ta nhận thấy với bất kì hoành độ nào thì

- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ cũng nhỏ hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng $y = 2x$ là 1 đơn vị.
- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ cũng lớn hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng $y = 2x$ là 2 đơn vị.

Vậy, ta thấy:

- Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-1$.
- Đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.




**Ví dụ 5:** *Cho các hàm số:*

$$y = 2x - 1,\ \ y = 2 - x,\ \ y = 3 - 2x.$$

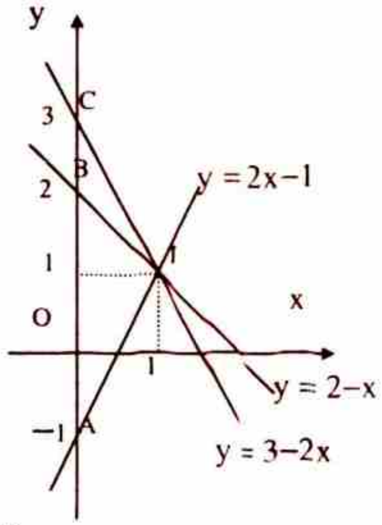
a. *Vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.*

b. *Có nhận xét gì về đồ thị của các hàm số này?*

*Giải*

a. Ta lần lượt vẽ:

- Với đồ thị $y = 2x - 1$ lấy hai điểm $A(0, -1)$ và $A_0(\frac{1}{2}, 0)$. Nối A và $A_0$ được đồ thị cần dựng.
- Với đồ thị $y = 2 - x$ lấy hai điểm $B(0, 2)$ và $B_0(2, 0)$. Nối B và $B_0$ được đồ thị cần dựng.
- Với đồ thị $y = 3 - 2x$ lấy hai điểm $C(0, 3)$ và $C_0(\frac{3}{2}, 0)$. Nối C và $C_0$ được đồ thị cần dựng.




b. Đồ thị của các hàm số này đồng quy tại điểm $I(1, 1)$.

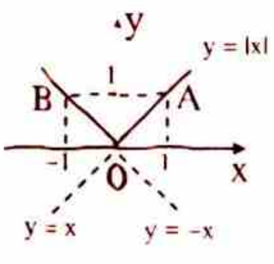
**Ví dụ 6:** *Vẽ đồ thị các hàm số sau:*

a. $y = |x|$. b. $y = |x - 2|$. c. $y = |x - 1| + 2$.

*Giải*

a. Ta biến đổi:

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases}.$$

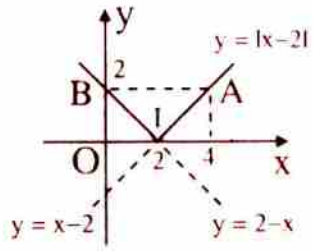



Do đó, đồ thị hàm số là hai tia OA (với $A(1; 1)$) và OB (với $B(-1; 1)$).

b. Ta biến đổi:

$y = |x - 2|$

$= \begin{cases} x - 2 \text{ nếu } x \geq 2 \\ -(x - 2) \text{ nếu } x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 - x \text{ nếu } x \leq 2 \end{cases}$

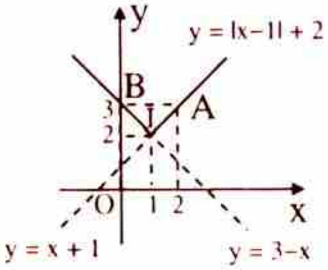



Do đó, đồ thị hàm số là hai tia IA (với I(2; 0) và A(4; 2)) và IB (với B(0; 2)).

c. Ta biến đổi:

$y = |x - 1| + 2 = \begin{cases} x - 1 + 2 \quad \text{nếu } x \geq 1 \\ -(x - 1) + 2 \text{ nếu } x \leq 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq 1 \\ 3 - x \text{ nếu } x \leq 1 \end{cases}$




Do đó, đồ thị hàm số là hai tia IA (với I(1; 2) và A(2; 3)) và IB (với B(0; 3)).

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = 4x$.

b. $y = x + 3$.

c. $y = -x + 6$.

d. $y = -3x - 3$.

e. $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

**Bài 2:** Cho hàm số y = ax. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 8).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm B($\frac{3}{4}$, − 3).

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

**Bài 3:** Cho hàm số y = (2a − 3)x. Hãy xác định a, để:

a. Hàm số luôn đồng biến? Nghịch biến?

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(2, 3).

c. Đồ thị hàm số đi qua điểm B($\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}$).

d. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp b), c), d).

**Bài 4:** Cho hàm số: y = 2ax − 3a.

a. Xác định a biết rằng đồ thị hàm số trên đi qua điểm M(2 ; 3).

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a).

c. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tìm được trong a).

**Bài 5:** Cho hàm số: y = ax + b.

a. Xác định a và b biết rằng đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng − 4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a).

c. Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong a) và các trục toạ độ.

**Bài 6:** Cho hàm số $y = |a - 1|x$. Hãy xác định a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 3).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

**Bài 7:** Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |x|$.

b. $y = |2x - 1|$.

c. $y = |x| + 2$.

d. $y = \left|\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right|$.

e. $y = \left|-\frac{x}{2} + 2\right|$.

**Bài 8:** Tìm tập hợp các điểm M(x, y) sao cho:

a. $y < x + 2$.

b. $y \le -x + 1$.

c. $y \ge -2x + 2$.

d. $\begin{cases} y \le x \\ y \le -2x + 4 \\ y \ge -x + 1 \end{cases}$.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** *Học sinh tự làm.*

**Bài 2:** *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Vì điểm A(1, 8) thuộc đồ thị hàm số nên: $8 = a.1 \Leftrightarrow a = 8$.
Vậy hàm số có dạng $y = 8x$.

b. Vì điểm $B(\frac{3}{4}, -3)$ thuộc đồ thị hàm số nên: $-3 = a.\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4$.

Vậy hàm số có dạng $y = -4x$.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III, ta có ngay $a = 1$.

**Bài 3:** *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Hàm số luôn đồng biến khi và chỉ khi: $2a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$.

Hàm số luôn nghịch biến khi và chỉ khi: $2a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$.

b. Vì điểm A(2, 3) thuộc đồ thị hàm số nên: $3 = (2a - 3)2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$.

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{3}{2}x$.

c. Vì điểm $B(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2})$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-\frac{1}{2} = (2a - 3).\frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.

d. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có:

$$2a - 3 = -1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -x$.

**Bài 4:**

a. Vì điểm M(2 ; 3) thuộc đồ thị hàm số nên: $3 = 2a.2 - 3a \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó, hàm số có dạng $y = 6x - 9$.

b. Ta lấy hai điểm $A(0, -9)$ và $B(\frac{3}{2}, 0)$ – *Học sinh tự vẽ hình.*

c. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{9.\frac{3}{2}}{\sqrt{9^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{27}{\sqrt{333}} = \frac{9}{\sqrt{37}}.$$

Vậy, khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng bằng $\frac{9}{\sqrt{37}}$.

**Bài 5:** *Học sinh tự làm.*

**Bài 6:** *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Vì điểm A(1, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = |a - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 3 \\ a - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số có dạng $y = 3x$.

b. Vì điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$ thuộc đồ thị hàm số nên: $8 = |a - 1|.(-\frac{1}{2})$ vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại a.

**Bài 7:** Tham khảo ví dụ 8.

**Bài 8:** *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = x + 2$.

Khi đó tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn $y < x + 2$ nằm phía dưới đồ thị hàm số.

b. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = -x + 1$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn $y \le -x + 1$ nằm phía dưới đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

c. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = -2x + 2$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn $y \ge -2x + 2$ nằm phía trên đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

d. Thực hiện vẽ đồ thị các hàm số $y = x$, $y = -2x + 4$, $y = -x + 1$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn hệ thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi ba đồ thị trên.

**CHỦ ĐỀ 4** ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG**

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b$ $(a' \neq 0)$ là:

- Song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- Trùng nhau nếu $a = a'$ và $b = b'$.

**2. ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU**

Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

Đặc biệt nếu $a \neq a'$ và $b = b'$, chúng cắt nhau tại một điểm trên Oy.

**3. VỊ TRÍ CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ**

Cho hai đường thẳng $(d_1)$: $y = a_1x + b_1$, $(d_2)$: $y = a_2x + b_2$ ta có các kết quả sau:

- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
- $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Cho hàm số:*

$$y = ax + 2.$$

a. *Xác định* a, *biết đồ thị hàm số song song với đường thẳng* $y = -x$.

b. *Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong* a). *Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong* a) *và các trục toạ độ.*

*Giải*

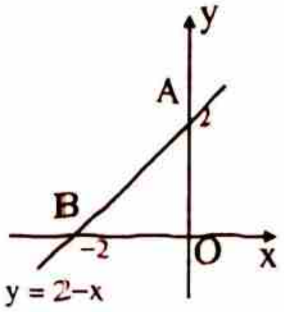
a. Vì đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x$ nên $a = -1$.

Vậy, hàm số có dạng $y = -x + 2$.

b. Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy hai điểm A(0; 2) và B(2; 0).

Nối A và B ta được đồ thị cần vẽ. Khi đó:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.2.2 = 2.$$




***Chú ý***: Ta có, các kết quả:

- Với điểm $A(0; y_A)$ thì $OA = |y_A|$.
- Với điểm $A(x_A; 0)$ thì $OA = |x_A|$.
- Với điểm $A(x_A; y_A)$ thì $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$.

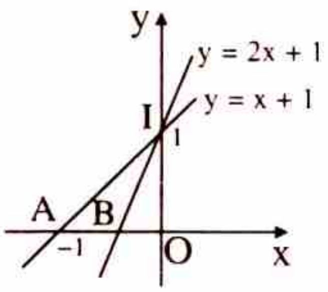
**Ví dụ 2:** *Cho hai đường thẳng:*

$(d_1)$: $y = 2x + 1$ và $(d_2)$: $y = x + 1$.

a. *Chứng tỏ rằng hai đường thẳng* $(d_1)$ *và* $(d_2)$ *cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ.*

b. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *đi qua* I *và song song với đường thẳng* $y = -4x + 1$.

c. *Lập phương trình đường thẳng* (d') *đi qua I và song song với đường thẳng* $y = \frac{1}{2}x + 9$.




✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

- Đường thẳng $(d_1)$ có $a_1 = 2$ và $b_1 = 1$.
- Đường thẳng $(d_2)$ có $a_2 = 1$ và $b_2 = 1$.

Suy ra:

$a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2 \Rightarrow (d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau tại điểm I trên Oy.

Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có toạ độ $I(0; y_0)$, vì I thuộc $(d_1)$ (hoặc $(d_2)$) nên:

$y_0 = 2.0 + 1 \Leftrightarrow y_0 = 1 \Rightarrow I(0; 1)$.

b. Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -4x + 1$, có phương trình:

(d): $y = -4x + b$.

Vì I thuộc đường thẳng (d) nên:

$1 = -4.0 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = -4x + 1$.

c. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$, có phương trình:

(d'): $y = \frac{1}{2}x + b$, với $b \neq 9$.

Vì I thuộc đường thẳng (d') nên:

$1 = \frac{1}{2}.0 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = \frac{1}{2}x + 1$.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải của thí dụ trên:

1. Ở câu a), dựa trên nhận xét $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau tại điểm I trên Oy nên ta mới giả sử $I(0; y_0)$.

   Trong trường hợp tổng quát, với hai đường thẳng:

   $(d_1)$: $y = a_1x + b_1$ và $(d_2)$: $y = a_2x + b_2$ $(a_1 \neq a_2)$

ta giả sử toạ độ giao điểm $I(x_0; y_0)$, rồi nhận xét:

$$I \in (d_1) \Rightarrow y_0 = a_1x_0 + b_1. \quad (1)$$

$$I \in (d_2) \Rightarrow y_0 = a_2x_0 + b_2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$a_1x_0 + b_1 = a_2x_0 + b_2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

Thay $x_0$ và (1) (hoặc (2)) ta nhận được giá trị của $y_0$, từ đó suy ra toạ độ điểm I.

2. Ở câu b) và câu c), ta có thể khẳng định được b = 1 thông qua nhận định "*đường thẳng (d) và (d') luôn cắt $(d_1)$ tại điểm I thuộc Oy*".

**Ví dụ 1:** *Cho đường thẳng* ($\Delta$): $y = x + 6$.

*Lập phương trình đường thẳng* (d) *song song với đường thẳng* ($\Delta$) *và:*

a. *Đi qua điểm* M(1; 2).

b. *Khoảng cách từ* O *đến* (d) *bằng* $2\sqrt{2}$.

*Giải*

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng ($\Delta$) có phương trình:

(d): $y = x + b$.

a. Vì M(1, 2) thuộc (d) nên:

$$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Vậy, ta được (d): $y = x + 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0; b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + b \Leftrightarrow x = -b$, do đó B(−b; 0).

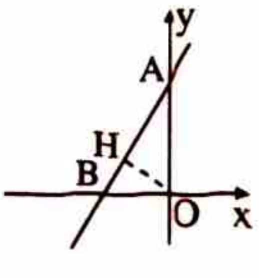
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong $\Delta$OAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{|b|.|-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$




Khi đó:

- Với b = 4, ta được đường thẳng $(d_3)$: $y = x + 4$.
- Với b = −4, ta được đường thẳng $(d_4)$: $y = x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_3)$ và $(d_4)$ thoả mãn điều kiện đầu bài

☛ *Nhận xét*: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả "*Mọi đường thẳng song song với đường thẳng y = ax + m luôn có phương trình y = ax + b*". Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta chỉ cần xác định b.

**Ví dụ 2:** *Lập phương trình đường thẳng* (d), *biết* (d) *đi qua điểm* M(1; 2) *và chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.*

✍ *Giải*

Đường thẳng (d) có phương trình(d): y = ax + b.

Vì M(1, 2) thuộc (d) nên:

$$2 = a + b \Leftrightarrow a = 2 - b. \quad (1)$$

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được A(0; b) và $B(-\frac{b}{a}; 0)$.

Với điều kiện OA = OB, suy ra:

$$|b| = \left|-\frac{b}{a}\right| \Leftrightarrow |b| = \left|\frac{b}{b-2}\right| \Leftrightarrow |b(b-2)| = |b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 2b = b \\ b^2 - 2b = -b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 3b = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 3 \\ b = 1 \end{array}\right. .$$

Khi đó:

- Với $b = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 2$, ta được đường thẳng ($d_1$): y = 2x.
- Với $b = 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = -1$, ta được đường thẳng ($d_2$): y = −x + 3.
- Với $b = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 1$, ta được đường thẳng ($d_3$): y = x + 1.

Vậy, tồn tại ba đường thẳng ($d_1$), ($d_2$) và ($d_3$) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☛ **Tổng quát:** Cho điểm A ($x_0$; $y_0$), ta dễ dàng chứng minh được rằng mọi đường thẳng (d) đi qua A luôn có phương trình:

$$(d): y = a(x - x_0) + y_0.$$

**Ví dụ 3:** *Cho họ đường thẳng* ($d_m$) *có phương trình*:

$$(d_m): y = -\frac{m-1}{2m-3}x + \frac{m+1}{2m-3}.$$

1. *Xác định* m *để*:
   a. ($d_m$) *đi qua* A(2; 1).
   b. ($d_m$) *có hướng đi lên* (*hàm số đồng biến*).
   c. ($d_m$) *song song với đường thẳng* (Δ): x − 2y + 12 = 0.
2. *Tìm điểm cố định mà họ* ($d_m$) *luôn đi qua*.

*Giải*

Viết lại phương trình họ đường thẳng $(d_m)$ dưới dạng:

$$(d_m): (m - 1)x + (2m - 3)y - m - 1 = 0.$$

1. Ta lần lượt có:

a. $(d_m)$ đi qua A(2; 1) khi và chỉ khi:

$$2(m - 1) + (2m - 3) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

b. $(d_m)$ có hướng đi lên khi và chỉ khi nó có hệ số góc dương

$$\Leftrightarrow -\frac{m-1}{2m-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1>0\\2m-3<0\end{cases}\\\begin{cases}m-1<0\\2m-3>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>1\\m<3/2\end{cases}\\\begin{cases}m<1\\m>3/2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

c. $(d_m)$ song song với đường thẳng $(\Delta)$ khi và chỉ khi:

$$-\frac{m-1}{2m-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

2. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà $(d_m)$ luôn đi qua, khi đó:

$(m - 1)x_0 + (2m - 3)y_0 - m - 1 = 0$, với $\forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 + 2y_0 - 1)m - x_0 - 3y_0 - 1 = 0$, với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0 + 2y_0 - 1 = 0\\x_0 + 3y_0 + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = 5\\y_0 = -2\end{cases}.$$

Vậy, $(d_m)$ luôn đi qua điểm cố định M(5; –2).

**Chú ý**: Với bài toán về sự đồng quy của ba đường thẳng

$$(d_1): y=a_1x + b_1,\ (d_2) : y = a_2x + b_2,\ (d_3) : y = a_3x + b_3,$$

ta thực hiện theo các bước:

***Bước 1:*** Xác định toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng $(d_1)$, $(d_2)$.

***Bước 2:*** Với yêu cầu :

- Để chứng minh $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$ đồng quy ta đi chứng minh $I \in (d_3)$.
- Để nhận được giá trị của tham số để ba đường thẳng đồng quy ta thiết lập điều kiện $I \in (d_3)$.

**Ví dụ 4:** *Cho ba đường thẳng:*

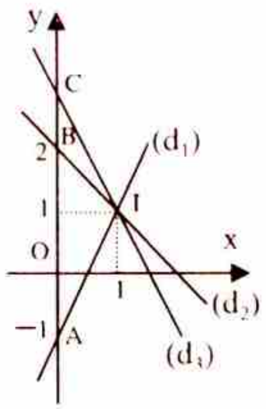
$$(d_1): y = 2x - 1,\ (d_2): y = 2 - x,\ (d_3): y = ax + 3.$$

*Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.*

✍ *Giải*

Giả sử giao điểm I của hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ có toạ độ $I(x_0; y_0)$.

Khi đó:




- Vì I thuộc $(d_1)$ nên $y_0 = 2x_0 - 1$. (1)
- Vì I thuộc $(d_2)$ nên $y_0 = -x_0 + 2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$2x_0 - 1 = -x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Vậy $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau tại điểm I(1; 1).

Để $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$ đồng quy điều kiện là:

$$I \in (d_3) \Leftrightarrow 1 = a + 3 \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy, với $a = -2$ thì $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$ đồng quy và khi đó $(d_3)$: $y = -2x + 3$.

Vẽ đồ thị:

- Để vẽ đồ thị của $(d_1)$ ta lấy thêm điểm A(0; −1).
- Để vẽ đồ thị của $(d_2)$ ta lấy thêm điểm B(0; 2).
- Để vẽ đồ thị của $(d_3)$ ta lấy thêm điểm C(0; 3).

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -3x$ và đi qua điểm M(1; 3). Vẽ đồ thị của (d).

**Bài 2:** Cho đường thẳng:

$$(\Delta): y = -x + 2.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và:

a. Đi qua điểm M(1, −2).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $9\sqrt{2}$.

**Bài 3:** Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$, biết:

a. $(d_1)$: $x + y + 1 = 0$; $(d_2)$: $2x + 2y + 3 = 0$.

b. $(d_1)$: $3x - y + 1 = 0$; $(d_2)$: $4x - y + 1 = 0$.

c. $(d_1)$: $x + 2y + 1 = 0$; $(d_2)$: $x + 4y + 3 = 0$.

d. $(d_1)$: $2x + 3y + 1 = 0$; $(d_2)$: $4x + 6y + 2 = 0$.

trong trường hợp cắt nhau hãy tìm toạ độ giao điểm.

**Bài 4:** Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): y = 2x - 1 \text{ và } (d_2): y = -x + 2.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ.

b. Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = 5x + 7$.

**Bài 5:** Cho hai đường thẳng:

$(d_1)$: $y = kx + k$,

$(d_2)$: $y = \frac{k^2 - 1}{2k}x + \frac{k^2 + 1}{2k}$, với $k \neq 0$.

a. Chứng minh rằng khi k thay đổi $(d_1)$ luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị của $k \neq 0$, hãy xác định giao điểm I của $(d_1)$ và $(d_2)$.

**Bài 6:** Cho ba đường thẳng:

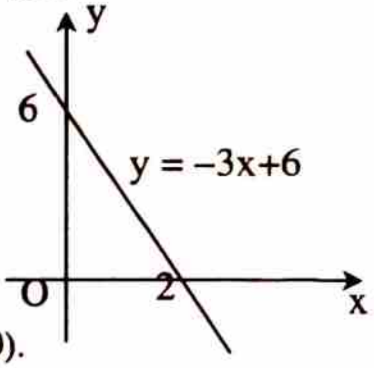
$(d_1)$: $y = 2x + 3$, $(d_2)$: $y = 3x + 2$,

$(d_3)$: $y = ax + a - 1$.

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**




a. Vì (d) song song với (Δ) nên có phương trình:

(d): $y = -3x + b$.

Vì M(1, 3) thuộc (d) nên:

$3 = -3.1 + b \Leftrightarrow b = 6$.

Vậy, ta được (d): $y = -3x + 6$.

b. Vẽ đồ thị của (d), ta lựa chọn hai điểm A(0, 6) và B(2, 0).

Nối A và B ta được đồ thị của (d).

**Bài 2:** Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình:

(d): $y = -x + b$.

a. Vì M(1, –2) thuộc (d) nên:

$-2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy, ta được (d): $y = -x - 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Leftrightarrow x = b$, do đó B(b, 0).

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}.|b|\,.\,|b| = \frac{b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng $(d_1)$: $y = -x + 4$.
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng $(d_2)$: $y = -x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Leftrightarrow x = b$, do đó B(b, 0).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{2} = \frac{|b|.|-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 18 \Leftrightarrow b = \pm 18.$$

Khi đó:

- Với b = 18, ta được đường thẳng $(d_3)$: $y = -x + 18$.
- Với b = −18, ta được đường thẳng $(d_4)$: $y = -x - 18$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_3)$ và $(d_4)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Bài 3:** *Hướng dẫn*: Chuyển các cặp đường thẳng về dạng $(d_1)$: $y = a_1x + b_1$ và $(d_2)$: $y = a_2x + b_2$, từ đó xác định $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ và đưa ra lời kết luận.

**Bài 4:**

a. Nhận xét rằng:

- Đường thẳng $(d_1)$ có $a_1 = 2$ và $b_1 = -1$.
- Đường thẳng $(d_2)$ có $a_2 = -1$ và $b_2 = 2$.

Suy ra:

$a_1 \neq a_2$ và $b_1 \neq b_2 \Rightarrow (d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau tại điểm I.

Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có toạ độ $I(x_0, y_0)$, khi đó:

- Vì I thuộc $(d_1)$ nên $y_0 = 2x_0 - 1$. (1)
- Vì I thuộc $(d_2)$ nên $y_0 = -x_0 + 2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$2x_0 - 1 = -x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau tại điểm I(1, 1).

b. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = 5x + 7$, có phương trình:

(d'): $y = 5x + b$, với $b \neq 7$.

Vì I thuộc đường thẳng (d') nên:

$1 = 5.1 + b \Leftrightarrow b = -4$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = 5x - 4$.

**Bài 5:**

a. $(d_1)$ luôn đi qua một điểm cố định M(−1, 0).

b. Giao điểm $I\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}, \frac{2k}{1+k^2}\right)$.

**Bài 6:** a = 1.

**CHỦ ĐỀ 5**

# HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

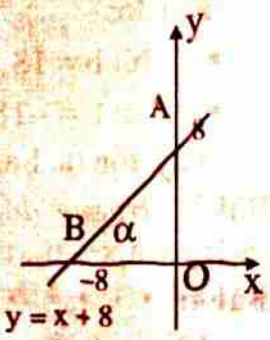
## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Đường thẳng y = ax + b có hệ số góc là a và:

- Nếu a > 0 thì $\alpha < 90^0$.
- Nếu a < 0 thì $\alpha > 90^0$ (khi đó $\alpha = 180^0 - \widehat{ABO}$)

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

<u>**Vấn đề 1:**</u> **HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG**




<u>**Ví dụ 1:**</u> *Cho đường thẳng:*

(d): y = x + 8.

a. *Vẽ đường thẳng* (d).

b. *Tính hệ số góc của đường thẳng* (d).

✍ *Giải*

a. Ta lấy hai điểm thuộc (d) là A(0; 8) và B(−8; 0). Nối A và B ta nhận được đồ thị của (d).

b. Ta có ngay, đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 1.

<u>**Ví dụ 2:**</u> *Cho hai điểm* A (2; 3) *và* B (5; 8) *thuộc đường thẳng* (d).

a. *Tính hệ số góc của đường thẳng* (d).

b. *Xác định đường thẳng* (d) *đó.*

✍ *Giải*

a. Giả sử phương trình của đường thẳng (d) có dạng y = ax + b.

Ta có:

A(2; 3) ∈ (d) ⇒ 2 = 3a + b. (1)

B (5; 8) ∈ (d) ⇒ 8 = 5a + b. (2)

Lấy (2) trừ (1) suy ra: 2a = 6 ⇒ a =3.

Vậy, hệ số góc của (d) bằng 3.

b. Thay a = 3 vào (1) ta được: 3.3 + b = 2 ⇔ b = −7.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): y = 3x − 7.

☛ <u>**Tổng quát:**</u> Cho hai điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$ thuộc đường thẳng (d), trong đó $x_1 \neq x_2$. Ta dễ dàng chứng minh được:

- Hệ số góc của đường thẳng (d) là: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- Phương trình (d) được xác định bởi công thức: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. (*)

  Trong nhiều bài toán việc sử dụng công thức (*) để xác định đường thẳng (d) dễ dàng hơn nhiều.

**Vấn đề 2: LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG BIẾT HỆ SỐ GÓC**

*Phương pháp*

Ta ghi nhận kết quả:

" *Mọi đường thẳng có hệ số góc* k *luôn có phương trình* y = kx + **b** ".

Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng ta chỉ cần xác định b.

**Ví dụ 1:** *Lập phương trình đường thẳng* (d) *có hệ số góc bằng* $\frac{4}{3}$ *và:*

a. *Đi qua điểm* M(−1; −1).

b. *Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng* 24.

✍ *Giải*

Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ có phương trình $y = \frac{4}{3}x + b$.

a. Vì M(−1; −1) thuộc (d) nên $-1 = \frac{4}{3}.(-1) + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, ta được (d): $y = \frac{4}{3}x + 1$.

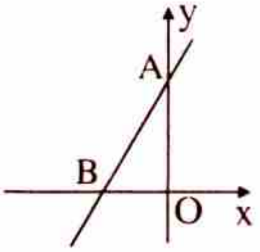
b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó A(0; b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{4}$, do đó $B(-\frac{3b}{4}; 0)$.

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2}.|b|.\left|-\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8}$$

$$\Rightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8.$$




Khi đó:

- Với b = 8, ta được đường thẳng $(d_1)$: $y = \frac{4}{3}x + 8$.
- Với b = −8, ta được đường thẳng $(d_2)$: $y = \frac{4}{3}x - 8$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Ví dụ 2:** *Lập phương trình đường thẳng* (d) *có hệ số góc bằng* $\frac{4}{3}$ *và khoảng cách từ* O *đến* (d) *bằng* $\frac{12}{5}$.

*Giải*

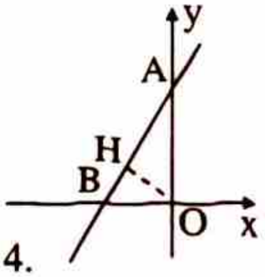
Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ có phương trình $y = \frac{4}{3}x + b$.

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{4}$, do đó $B(-\frac{3b}{4}, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:




$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{5} = \frac{|b|.\left|-\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2 + \left(-\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5} \Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Khi đó:

- Với b = 4, ta được đường thẳng $(d_3)$: $y = \frac{4}{3}x + 4$.
- Với b = –4, ta được đường thẳng $(d_4)$: $y = \frac{4}{3}x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_3)$ và $(d_4)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Ví dụ 3:** *Lập phương trình đường thẳng* (d), *biết* (d) *cắt* Ox, Oy *theo thứ tự tại* A(a, 0), B(0, b) *với* a, b ≠ 0.

*Giải*

Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng y = kx + m.

- Vì B(0, b) thuộc (d) nên: $b = k.0 + m \Leftrightarrow m = b$.
- Vì A(a, 0) thuộc (d) nên: $0 = ka + m \Leftrightarrow ka = -m = -b \Leftrightarrow k = -\frac{b}{a}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = -\frac{b}{a}x + b \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

**Nhận xét:** Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng đi qua hai điểm A(a, 0) và B(0, b) với a, b ≠ 0 luôn có phương trình* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ".

Phương trình trên được gọi là phương trình đoạn chắn.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng phương trình đoạn chắn để giải toán.

**Ví dụ 4:** *Trên mặt phẳng toạ độ, cho điểm* M(4, 1). *Một đường thẳng* (d) *luôn đi qua* M *cắt* Ox, Oy *theo thứ tự tại* A(a, 0), B(0, b) *với* a, b > 0. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *sao cho:*

a. *Diện tích* ΔOAB *nhỏ nhất.*

b. OA + OB *nhỏ nhất.*

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ *nhỏ nhất.*

*Giải*

Từ giả thiết, ta được (d): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Vì M(4; 1) thuộc (d) nên: $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4b}{b-1}$, với b > 1. (*)

a. Diện tích ΔOAB được cho bởi: $S = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{ab}{2}$.

Từ (*), sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Suy ra, ta được $S_{Min} = 8$, đạt được khi: $\frac{4}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

b. Ta có:

$$OA + OB = |a| + |b| = \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b + 4$$

$$= \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1}.(b-1)} + 5 = 9.$$

Suy ra, ta được $(OA + OB)_{Min} = 9$, đạt được khi:

$$\frac{4}{b-1} = b - 1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

c. Ta có $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(4^2+1^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \ge \left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{17}.$$

Suy ra, ta được $\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\right)_{Min} = \frac{1}{17}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ 4a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{17}{4} \\ b=17 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{17/4}+\frac{y}{17}=1 \Leftrightarrow (d): y=-\frac{1}{4}x+17.$$

☛ ***Chú ý***: Sai lầm thường gặp của học sinh trong câu b) là dùng lập luận:

$$OA + OB = a + b \ge 2\sqrt{ab} \ge 8.$$

Khi đó $(OA + OB)_{Min} = 8$ đạt được khi $a = b \xrightarrow{(*)} a = b = 5$.

**Ví dụ 5:** a. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A(–5; 5) *sao cho* (d) *tạo với tia* Ox *một góc* α *có* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

b. *Tìm trên đường thẳng* (d) *điểm* $M(x_M, y_M)$ *sao cho* $x_M^2 + y_M^2$ *nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.

- (d) tạo với tia Ox một góc α có $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ nên: $a = \tan\alpha = \frac{1}{2}$.
- Vì A(–5, 5) thuộc (d) nên: $5 = a(-5) + b = \frac{1}{2}(-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{2}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$.

a. Vì $M(x_M, y_M)$ thuộc (d) nên: $y_M = \frac{1}{2}x_M + \frac{15}{2} \Leftrightarrow x_M = 2y_M - 15$.

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2y_M - 15)^2 + y_M^2$$
$$= 5y_M^2 - 60y_M + 225 = 5(y_M - 6)^2 + 45 \ge 45.$$

Suy ra, ta được $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$$y_M = 6 \Rightarrow x_M = 2.6 - 15 = -3.$$

Vậy ta tìm được M(–3, 6).

☛ *Nhận xét*: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), ta sử dụng kết quả " *Nếu đường thẳng* (d): y = ax + b *tạo với tia* Ox *một góc* α *thì* a = tanα ".
2. Điểm M được tìm trong câu b) chính là toạ độ hình chiếu vuông góc của O lên (d).

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1**: Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d):

a. Đi qua điểm M (1, 2) có hệ số góc bằng 3.

b. Đi qua điểm A (-3, 2) và tạo với tia Ox một góc $45^0$.

c. Đi qua điểm B (3, 2) và tạo với trục Ox một góc $60^0$.

**Bài 2**: Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ và:

a. Đi qua điểm M(1; −1).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 54.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\frac{3}{5}$.

**Bài 3**: Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): y = - 3x và đi qua điểm M(1 ; 3). Vẽ đồ thị của (d).

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Giả sử đường thẳng (d) có phương trình y = ax + b.

a. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 nên a = 3.
Vì M(1; 2) thuộc (d) nên $2 = a.1 + b = 3.1 + b \Leftrightarrow b = -1$.
Vậy, phương trình đường thẳng (d): y = 3x − 1.

b. Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc $45^0$ nên $a = \tan 45^0 = 1$.
Vì A(−3, 2) thuộc (d) nên:
$$2 = a.(-3) + b = 1.(-3) + b \Leftrightarrow b = 5.$$
Vậy, phương trình đường thẳng (d): y = x + 5.

c. Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc $60^0$, ta được $a = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.
Vì B(3; 2) thuộc (d) nên:
$$2 = a.3 + b = \sqrt{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 2 - 3\sqrt{3}.$$
Vậy, phương trình đường thẳng ($d_1$): $y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$.

*Trường hợp 2*: Đường thẳng (d) tạo với tia đối của tia Ox một góc $60^0$, ta được:
$$a = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}.$$
Vì B(3; 2) thuộc (d) nên $2 = a.3 + b = -\sqrt{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 2 + 3\sqrt{3}$.
Vậy, phương trình đường thẳng ($d_2$): $y = -\sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3}$.
Kết luận, có hai đường thẳng ($d_1$) và ($d_2$) thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Bài tập 2.** Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ có phương trình:

$$(d): y = -\frac{4}{3}x + b.$$

a. Vì M(1, −1) thuộc (d) nên $-1 = -\frac{4}{3}.1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, ta được (d): $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó $B(\frac{3b}{4}, 0)$.

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 54 = \frac{1}{2}.|b|.\left|\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8} \Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow b = \pm 12.$$

Khi đó:

- Với b = 12, ta được đường thẳng $(d_1)$: $y = -\frac{4}{3}x + 12$.
- Với b = −12, ta được đường thẳng $(d_2)$: $y = -\frac{4}{3}x - 12$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó $B(\frac{3b}{4}, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).
Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{|b|.\left|\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5}$$

$$\Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với b = 1, ta được đường thẳng $(d_3)$: $y = -\frac{4}{3}x + 1$.
- Với b = −1, ta được đường thẳng $(d_4)$: $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng $(d_3)$ và $(d_4)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

# PHẦN HÌNH HỌC

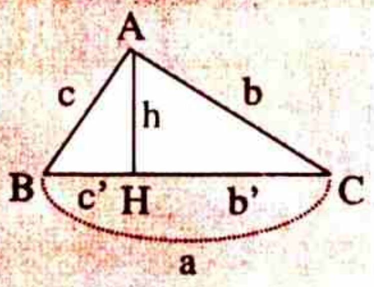
## CHƯƠNG I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### CHỦ ĐỀ 1 MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH GÓC VUÔNG VÀ HÌNH CHIẾU CỦA NÓ TRÊN CẠNH HUYỀN**

***Định lí 1**: Trong một tam giác vuông, bình phương một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.*




**Như vậy, trong $\Delta ABC$ vuông tại A, ta nhận được:**

$$AB^2 = BC.BH \Leftrightarrow c^2 = a.c',$$

$$AC^2 = BC.CH \Leftrightarrow b^2 = a.b',$$

**2. MỘT SỐ HỆ THỨC LIÊN QUAN TỚI ĐƯỜNG CAO**

***Định lí 2**: Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.*

Như vậy, trong $\Delta ABC$ vuông tại A (hình trong định lí 1), ta nhận được:

$$AH^2 = BH.CH \Leftrightarrow h^2 = b'.c'.$$

***Định lí 3**: Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.*

Như vậy, trong $\Delta ABC$ vuông tại A (hình trong định lí 1), ta nhận được:

$$AB.AC = AH.BC \Leftrightarrow bc = ah.$$

***Định lí 4**: Trong một tam giác vuông, nghịch đảo bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.*

Như vậy, trong $\Delta ABC$ vuông tại A (hình trong định lí 1), ta nhận được:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

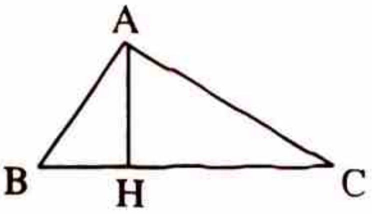
## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Vấn đề 1: GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG**

**Ví dụ 1:** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* A, AB = 3cm, AC = 4cm, AH *là đường cao. Tính độ dài các đoạn thẳng* BC, BH, CH, AH.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5cm.$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5}\ cm.$$

$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5}\ cm.$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow AH = \frac{12}{5}\ cm.$$

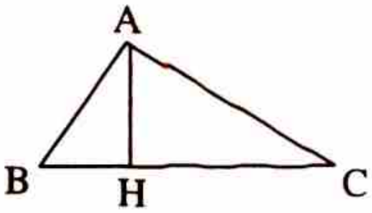
**Ví dụ 2:** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* A, *đường cao* AH, *biết* BH = 3cm, $CH = \frac{16}{3}$ cm.

a. *Tính độ dài các cạnh của* $\Delta ABC$.

b. *Tính độ dài* AH.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:



$$BC = BH + CH = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}\ cm.$$

$$AB^2 = BH.BC = 3.\frac{25}{3} = 25 \Leftrightarrow AB = 5cm.$$

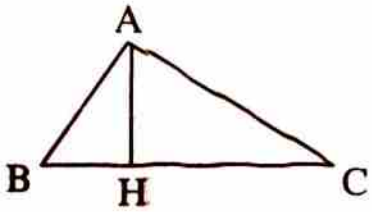
$$AC^2 = CH.BC = \frac{16}{3}.\frac{25}{3} = \frac{400}{9} \Leftrightarrow AC = \frac{20}{3}\ cm.$$

$$AH^2 = BH.CH = 3.\frac{16}{3} = 16 \Leftrightarrow AH = 4cm.$$

**Ví dụ 3:** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* A, AB = 6cm, BC = 10cm. *Tính độ dài đường cao* AH.

✍ *Giải*

Ta có:



$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{100-36} = 8cm.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{25}{576}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{5}{24}\ cm.$$

## Vấn đề 2: GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

**Ví dụ 1:** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* A; AH *là đường cao.* HE, HF *lần lượt là các đường cao của* $\Delta AHB$, $\Delta AHC$. *Chứng minh rằng*:

a. $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.

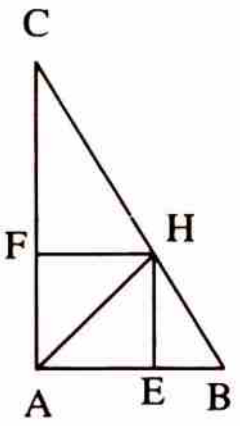
b. $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$3AH^2 + BE^2 + CF^2 = 3AH^2 + BH^2 - HE^2 + CH^2 - HF^2.$$
$$= 3AH^2 - EF^2 + (BH + HC)^2 - 2HB.HC$$
$$= 2AH^2 + BC^2 - 2AH^2 = BC^2.$$

b. Trong $\Delta AHB$, ta có:




$$BE = \frac{BH^2}{BA} \Rightarrow BE^2 = \frac{BH^4}{BA^2} = \frac{BH^4}{BH.BC} = \frac{BH^3}{BC} \quad (1)$$

Trong $\Delta AHC$:

$$CF = \frac{CH^2}{CA} \Rightarrow CF^2 = \frac{CH^4}{CA^2} = \frac{CH^4}{CH.BC} = \frac{CH^3}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \frac{BH}{\sqrt[3]{BC}} + \frac{CH}{\sqrt[3]{BC}} = \frac{BC}{\sqrt[3]{BC}} = \sqrt[3]{BC}.$$

**Ví dụ 2:** *Cho* $\Delta ABC$, *biết*:

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c). \quad (1)$$

*chứng minh rằng* $\Delta ABC$ *là vuông.*

✍ *Giải*

Sử dụng công thức Hêrông, ta biến đổi (1) về dạng:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-c)(p-b)$$
$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2 \Leftrightarrow p(p-a) = (p-c)(p-b)$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (a+b-c)(a+c-b)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là vuông tại C.}$$

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, AB = 15, AC = 20, AH là đường cao.

a. Tính BC. b. Tính BH.

c. Tính CH. d. Tính AH.

**Bài 2.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A và AB < AC, đường cao AH. Biết rằng $AH = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ cm, $BC = \sqrt{13}$ cm.

a. Tính AB. b. Tính AC.

c. Tính HB. d. Tính HC.

**Bài 3.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, $\tan C = \frac{3}{4}$ và đường cao AH = 12cm.

a. Tính độ dài đoạn BH.

b. Tính độ dài đoạn CH.

c. Tính độ dài đoạn AB.

d. Tính độ dài đoạn AC.

**Bài 4.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết BH = 1cm, $AC = 2\sqrt{5}$ cm

a. Tính độ dài cạnh BC.

b. Tính độ dài cạnh AB.

c. Tính độ dài cạnh AH.

**Bài 5.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, AB = 3cm, AC = 4cm, đường cao AH. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho IA = 2IB, CI cắt AH tại E. Tính độ dài CE.

**Bài 6.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, AD là phân giác trong của góc $\hat{A}$. Khẳng định $AD = \frac{\sqrt{2}}{b+c}bc$ là đúng hay sai ?

**Bài 7.** Cho $\Delta ABC$ vuông ở A, đường cao AH; r, $r_1$, $r_2$ lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng:

a. $r_1 = r\frac{c}{a}$ và $r_2 = r\frac{b}{a}$.

b. $r_1^2 + r_1^2 = r^2$.

**Bài 8.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A; D là hình chiếu của A trên BC; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC}$.

b. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3 = \frac{BE}{CF}$.

b. $AD^3 = BC.EB.CF$.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** BC = 25cm; BH = 9cm; CH = 16cm; AH = 12cm.

**Bài tập 2.** AB = 2cm; AC = 3cm; $HB = \frac{4}{\sqrt{13}}$ cm; $HC = \frac{9}{\sqrt{13}}$ cm.

**Bài tập 3.** BH = 9cm; CH = 16cm; AB = 15cm; AC = 20cm.

**Bài tập 4.** BC = 5cm; $AB = \sqrt{5}$ cm; AH = 2cm.

**Bài tập 5.** $\frac{16\sqrt{5}}{11}$ cm.

**Bài tập 6.** Đúng.

**CHỦ ĐỀ 2**

# TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

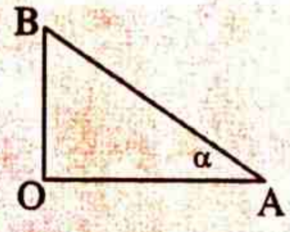
**1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC**

Cho $\Delta OAB$ vuông tại O, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OB}{AB} \text{ và } \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OA}{AB}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{OB}{OA}.$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{OA}{OB}.$$




**2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT**

| Độ do / Hàm | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | \|\| |
| $\cot\alpha$ | \|\| | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

**3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU**

a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$.

b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

c. $\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$.

d. $\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Vấn đề 1: GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

**Ví dụ 1:** *Tính giá trị của biểu thức:*

a. $A = 4 - \sin^2 45^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\cot^3 45^0$.

b. $B = \tan 45^0.\cos 30^0.\cot 30^0$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

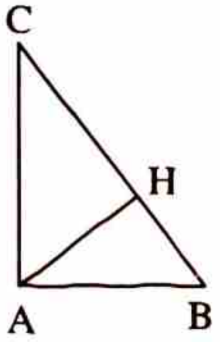
$$A = 4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = 1.$$

b. Ta có:

$$B = 1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

**Ví dụ 2:** *Cho* ΔABC *vuông tại A,* $\tan C = \frac{2}{3}$ *và đường cao* AH = 6. *Tính độ dài các đoạn* HB, HC, AB, AC.

✍ *Giải*




Hai ΔAHB và ΔCHA đồng dạng, do đó:

$$\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{AC} = \tan C = \frac{2}{3} \Rightarrow HC = \frac{3}{2}AH = 9.$$

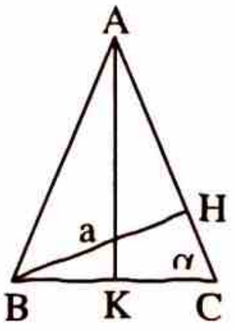
$$\frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} = \tan C = \frac{2}{3} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}AH = 4.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{4(4+9)} = 2\sqrt{13}.$$

$$AC^2 = CH.BC \Leftrightarrow AC = \sqrt{CH.BC} = \sqrt{9(4+9)} = 3\sqrt{13}.$$

**Ví dụ 3:** *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Đường cao* BH = a, $\widehat{ABC} = \alpha$. *Tính các cạnh và đường cao còn lại.*




✍ *Giải*

Trong ΔHBC, ta được:

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{BH}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Trong ΔKAB, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{BK}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{BK}{\cos\alpha} = \frac{\frac{BC}{2}}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK = AB.\sin\alpha = \frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}.\sin\alpha = \frac{a}{2\cos\alpha}.$$

## Vấn đề 2: GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

**Ví dụ 3:** *Cho hai tam giác vuông* ΔABC *và* $\Delta A_1B_1C_1$ *vuông tại* A *và* $A_1$ *và đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng:*

a. $aa_1 = bb_1 + cc_1$.

b. $\frac{1}{hh_1} = \frac{1}{bb_1} + \frac{1}{cc_1}$.

*Giải*

a. Trong $\Delta ABC$, ta có:

$b = a.\cos\alpha$, $c = a.\sin\alpha$,

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$b_1 = a_1.\cos\alpha$, $c_1 = a_1.\sin\alpha$

Từ đó suy ra:

$bb_1 + cc_1 = aa_1.\cos^2\alpha + aa_1.\sin^2\alpha = aa_1.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = aa_1$ (đpcm).

b. Trong $\Delta ABC$, ta có:

$$b = \frac{h}{\sin\alpha}, c = \frac{h}{\cos\alpha}.$$

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$b_1 = \frac{h_1}{\sin\alpha}, c_1 = \frac{h_1}{\cos\alpha}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{bb_1} + \frac{1}{cc_1} = \frac{1}{\frac{hh_1}{\sin^2\alpha}} + \frac{1}{\frac{hh_1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{hh_1} = \frac{1}{hh_1} \text{ (đpcm).}$$

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1.** Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 3a.\cos0^0 + b.\sin90^0 - a.$

b. $B = 4a^2.\sin^2 45^0 - 3(a.\tan45^0)^2 + (2a.\cos45^0)^2.$

**Bài 2.** Tính giá trị của biểu thức $A = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\tan^3 60^0$.

**Bài 3.** Tính giá trị của biểu thức $A = (a^2 + 1).\sin0^0 + b.\cos90^0$.

**Bài 4.** Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2\sin 90^0 - b^2\cos 0^0}{a.\cot 45^0 - b - 2a.\cot 90^0}.$$

**Bài 5.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, biết AB = 3cm, AC = 4cm. Hãy giải $\Delta ABC$.

**Bài 6.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, biết AB = 6cm, BC = 10cm. Hãy giải $\Delta ABC$.

**Bài 7.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A đường cao AH, biết BH = 4cm, CH = 1cm. Hãy giải $\Delta ABC$.

**Bài 8.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A đường cao AH, biết BH = 1cm, AH = 9cm. Hãy giải $\Delta ABC$.

**Bài 9.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A đường cao AH, biết BH = 4cm, AB = 6cm. Hãy giải $\Delta ABC$.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**

a. Ta có $A = 3a + b - a = 2a + b$.

b. Ta có $B = 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$.

**Bài 2:** $A = -\frac{3}{4}$.

**Bài 3:** $A = 0$.

**Bài 4:** $A = a + b$.

**Bài 5:** Ta lần lượt có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5cm$,

$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$, $\tan\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

**Bài 6:** Ta lần lượt có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AC = 8cm$,

$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{15}$, $\sin\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{3}{15}$.

**Bài 7:** Ta lần lượt có:

$BC = BH + CH = 4 + 1 = 5cm$,

$AB^2 = BC.BH = 5.4 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ cm,

$AC^2 = BC.CH = 5.1 = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$ cm,

$\sin\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

**Bài 8:** Ta lần lượt có:

$AH^2 = BH.CH \Leftrightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = 81cm \Rightarrow BC = BH + CH = 1 + 81 = 82cm$,

$AB^2 = BC.BH = 82.1 = 82 \Rightarrow AB = \sqrt{82}$ cm,

$AC^2 = BC.CH = 82.81 \Rightarrow AC = 9\sqrt{82}$ cm,

$\sin\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{82}}$.

**Bài 9:** Ta lần lượt có:

$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = 9cm$,

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \Rightarrow AC = 2\sqrt{14}$ cm,

$\sin\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{9}$.

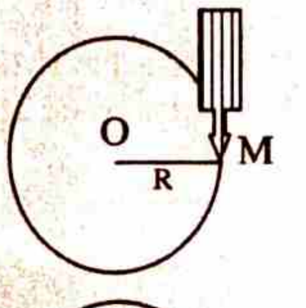
# CHƯƠNG II – ĐƯỜNG TRÒN

## CHỦ ĐỀ 1 SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN – TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### 1. NHẮC LẠI VỀ ĐƯỜNG TRÒN

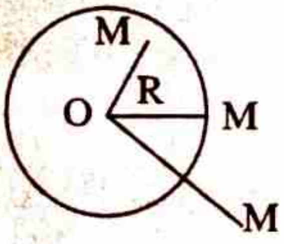
***Định nghĩa***: *Đường tròn tâm* O *bán kính* R (*với* R > 0) *là hình gồm các điểm cách* O *một khoảng bằng* R.




Đường tròn như vậy được kí hiệu (O; R), trong trường hợp không cần chú ý đến bán kính có thể sử dụng kí hiệu (O).

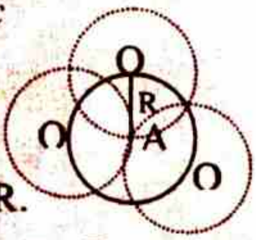
Cho đường tròn (O; R) và điểm M, ta có:

- Nếu OM < R ⇔ M nằm trong đường tròn.
- Nếu OM = R ⇔ M nằm trên đường tròn.
- Nếu OM > R ⇔ M nằm ngoài đường tròn.




### 2. CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

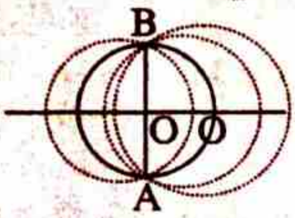
Theo định nghĩa một đường tròn sẽ hoàn toàn được xác định khi biết tâm và bán kính, vậy với câu hỏi " *Hãy xác định tâm O của đường tròn*, biết:




a. Đường tròn đi qua điểm A và có bán kính bằng R.
Khi đó:

AO = R ⇔ O∈(A; R) – Đường tròn tâm A, bán kính R.

b. Đường tròn đi qua hai điểm A và B.
Khi đó:



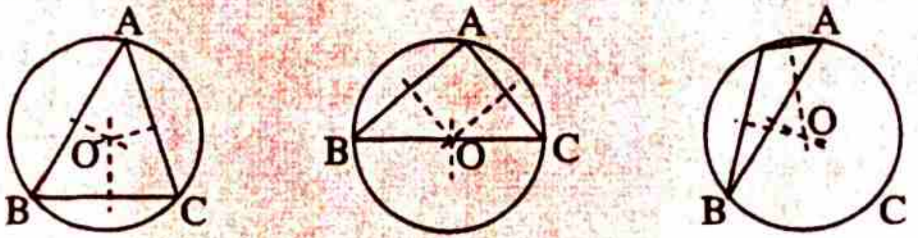

OA = OB

⇔ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c. Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
Khi đó:

OA = OB ⇔ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.
OA = OC ⇔ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.
OB = OC ⇔ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vậy, tâm O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔABC.



*Trường hợp đặc biệt*: Nếu $\Delta ABC$ vuông thì tâm của của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là trung điểm của cạnh huyền.

Ta có các kết quả:

- Một điểm O cho trước và một số thực $R > 0$ cho trước xác định một đường tròn (O; R).
- Một đoạn thẳng AB cho trước xác định một đường tròn đường kính AB (tâm O là trung điểm của AB), kí hiệu $(O; \frac{AB}{2})$.
- Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó, kí hiệu (ABC).

**3. TÂM ĐỐI XỨNG – TRỤC ĐỐI XỨNG**

Ta có kết quả:

- Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

## Vấn đề 1: CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

*Phương pháp*

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

***Cách 1***: Sử dụng định nghĩa, ta chứng minh các điểm này cùng cách đều một điểm.

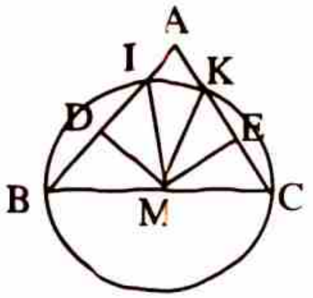
***Cách 2***: Sử dụng kết quả "*Nếu* $\widehat{ABC} = 90^0$ *thì* B *thuộc đường tròn đường kính* AC".

**Ví dụ 1:** *Cho* $\Delta ABC$ *và* M *là trung điểm của* BC. *Hạ* MD, ME *theo thứ tự vuông góc với* AB *và* AC. *Trên tia* BD *và* CE *lần lượt lấy các điểm* I, K *sao cho* D *là trung điểm của* BI, E *là trung điểm của* CK. *Chứng minh rằng bốn điểm* B, I, K, C *cùng nằm trên một đường tròn.*

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: (*Sử dụng định nghĩa*) Ta có:




- M là trung điểm BC nên:

$$MB = MC = \frac{1}{2}BC. \quad (1)$$

- MD là trung trực của BI nên:

$$MI = MB. \quad (2)$$

- ME là trung trực của CK nên:

$$MK = MC. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$.

Vậy bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn tâm M, bán kính $\frac{1}{2}BC$.

*Cách 2*: Ta có:

- MD là trung trực của BI nên:

$$MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BCI \text{ vuông tại I}$$

$\Leftrightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính BC. (4)

- ME là trung trực của CK nên:

$$MK = MC = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BCK \text{ vuông tại K}$$

$\Leftrightarrow$ K thuộc đường tròn đường kính BC. (5)

Vậy, bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, để chứng minh bốn điểm B, I, K, C cùng thuộc một đường tròn, ta có thể sử dụng cả hai cách và:

- Ở cách 1, ta khẳng định điểm M (đã cho sẵn) cách đều bốn điểm B, I, K, C dựa trên tính chất đường trung trực.
- Ở cách 2, ta khéo léo chứng minh $\widehat{BIC} = \widehat{BKC} = 90^0$ dựa trên kết quả "*Trong tam giác vuông trung tuyến bằng thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền và ngược lại*". Tuy nhiên, cách 2 được đề xuất thông qua kết quả của cách 1.

**Ví dụ 2:** *Chứng minh rằng qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn.*

✍ *Giải*

Ta đi chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại đường tròn (O) đi qua ba điểm thẳng hàng A, B, C.

Ta có:

$A, B \in (O) \Rightarrow OA = OB \Rightarrow$ O thuộc trung trực Ex của AB

$B, C \in (O) \Rightarrow OB = OC \Rightarrow$ O thuộc trung trực Fy của BC

suy ra $O = Ex \cap Fy$. (*)

Mặt khác, vì A, B, C thẳng hàng nên:

Ex // Fy, điều này mâu thuẫn với (*).

Vậy, qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn.

☛ **Chú ý**: Từ kết quả "*Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó* ", chúng ta có thể khai thác thêm như sau:

1. Nếu các điểm A, B, C, D thuộc đường tròn (O) và A, B, C, E thuộc đường tròn (O') thì (O) ≡ (O'), hay nói cách khác " *Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn* ".
2. Mở rộng hơn "*Nếu ta có A, B, C, D thuộc đường tròn ($O_1$) và A, B, C, E thuộc đường tròn ($O_2$) và A, B, C, F thuộc đường tròn ($O_3$)* " thì ($O_1$) ≡ ($O_2$) ≡ ($O_3$) ≡ (O) và (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

**Vấn đề 2: QUỸ TÍCH ĐIỂM LÀ MỘT ĐƯỜNG TRÒN**

*Phương pháp*

Với yêu cầu " *Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn tính chất* K ", ta cần trình bày lời giải gồm ba phần:

- ***Phần thuận***: Giả sử có điểm M thoả mãn điều kiện K, ta khéo léo suy ra rằng M thuộc một đường tròn (O), thí dụ:
  Chứng minh OM = r – không đổi.
  Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^0$, với O là trung điểm AB.
- ***Phần đảo***: Lấy M ∈ (O) và đi chứng minh rằng M có tính chất K.
- ***Kết luận***.

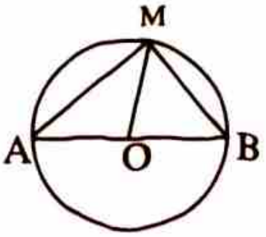
**Ví dụ 1:** *Cho đoạn thẳng* AB, *tìm tập hợp các điểm* M *sao cho* $\widehat{AMB} = 90^0$.

✍ *Giải*

Gọi O là trung điểm AB, khi đó với điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = 90^0$, ta được:

$\Delta ABM$ vuông tại M $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AB$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (O, $\frac{1}{2}$AB).




☛ **Chú ý**:

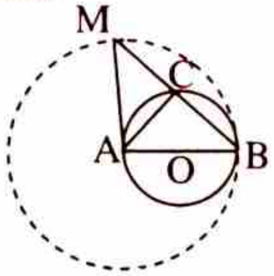
1. Cách trình bày trên chỉ có tính minh hoạ, còn để có được lời giải đúng của một *bài toán quỹ* cần thực hiện theo ba bước.
2. Từ nay, chúng ta được quyền sử dụng kết quả "*Nếu* $\widehat{AMB} = 90^0$ *thì M thuộc đường tròn đường kính AB*".

**Ví dụ 2:** *Cho đường tròn* (O) *đường kính* AB = R. C *là một điểm chạy trên đường tròn đó. Trên tia* BC *lấy một điểm* M *sao cho* C *là trung điểm của* BM. *Tìm quỹ tích của điểm* M.

✍ *Giải*

***Phần thuận***: Giả sử có điểm M sao cho C là trung điểm của BM.

Vì C thuộc đường tròn đường kính AB




$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow AC \perp BM$

$\Rightarrow \Delta ABM$ cân vì có AC vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

$\Rightarrow AM = AB = R \Leftrightarrow M \in (A, R)$.

***Phần đảo***: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (A, R), BM cắt (O) tại C. Ta phải chứng minh C là trung điểm của BM.

Thật vậy:

- $AM = AB = R \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại A
- $C \in (O) \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow AC \perp BM$

suy ra AC là đường cao ứng với cạnh đáy nên đồng thời là trung tuyến.

Vậy C là trung điểm của BM.

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (A, R).

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, để tìm tập hợp điểm M chúng ta đã tuân thủ đúng lược đồ của bài toán quỹ tích, cụ thể:

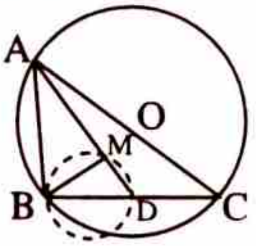
- ***Phần thuận***: Ta *giả sử có điểm M sao cho C là trung điểm của BM,* từ đó suy ra được $M \in (A, R)$.
- ***Phần đảo***: Ta lấy điểm $M \in (A, R)$ và đi chứng minh M thoả mãn điều kiện C là trung điểm của BM.
- ***Kết luận***.

**Ví dụ 3:** *Trên đường tròn (O) lấy hai điểm B, C cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn, D là trung điểm của BC. Gọi M là hình chiếu của B trên đường thẳng AD.*

a. *Tìm tập hợp điểm M khi A di chuyển trên (O)*

b. *Tìm vị trí của điểm A trên (O) để BM có độ dài lớn nhất.*

✍ *Giải*




a. *Hướng dẫn:*

$BM \perp DM \Leftrightarrow \widehat{BMD} = 90^0$

$\Leftrightarrow$ M di chuyển trên đường tròn có đường kính BD, trừ điểm B.

b. Ta có, trong đường tròn có đường kính BD thì

$BM \le BD$ (đường kính là dây lớn nhất).

Do đó, BM có độ dài lớn nhất bằng BD, đạt được khi

$M \equiv D \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A

$\Leftrightarrow$ A là giao điểm của đường tròn tâm O với đường trung trực của BC.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải b), để chỉ ra được vị trí cần tìm của điểm A sao cho BM lớn nhất chúng ta đã bắt đầu bằng bất đẳng thức:

$BM \le BD$, trong đó BD là độ dài không đổi

$\Rightarrow BM_{max} = BD$, đạt được khi $M \equiv D \Rightarrow$ vị trí của A.

Như vậy, lập luận đó dựa trên tính chất "*Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn*", tuy nhiên, nếu muốn, chúng ta có thể lập luận theo cách khác như sau:

$BD^2 = BM^2 + DM^2 \Rightarrow BM_{max}$ khi $DM_{min}$.

Từ đó, suy ra $BM_{max} = BD$ đạt được khi:

$DM_{min} = 0 \Leftrightarrow M \equiv D$.

**Vấn đề 3: DỰNG ĐƯỜNG TRÒN**

*Phương pháp*

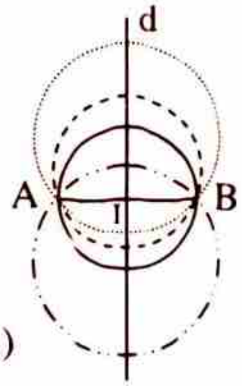
Để dựng một đường tròn ta cần biết tâm và bán kính và hãy nhớ lại "*Tâm của đường tròn đi qua hai điểm A và B cho trước nằm trên đường trung trực của AB*".

Để trình bày lời giải một bài toán dựng hình, ta cần thực hiện bốn phần:

- ***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O), từ đây suy ra vị trí tâm và độ dài bán kính của nó.
- ***Cách dựng***: Dựa vào kết quả ở bước phân tích chúng ta suy ra phép dựng hình.
- ***Chứng minh***: Chứng minh đường tròn được dựng ở bước dựng hình thoả mãn điều kiện đầu bài.
- ***Biện luận***: Số đường tròn thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Ví dụ 1:** a. *Hãy dựng một đoạn thẳng* AB = 6cm *và ba đường tròn phân biệt nhận* AB *làm một dây cung.*

b. *Trong tất cả các đường tròn nhận* AB *làm một dây cung thì đường tròn nào có đường kính nhỏ nhất ? Giải thích tại sao ?*




✍ *Giải*

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn thẳng AB = 6cm.
- Dựng trung trực d của AB. Trên d lấy bốn điểm $O_1, O_2, O_3$, I (I là trung điểm AB).
- Dựng bốn đường tròn $(O_1, O_1A)$, $(O_2, O_2A)$, $(O_3, O_3A)$ và (I, IA).

b. Gọi (O) là một đường tròn nhận AB làm một dây cung.

Vẽ đường kính AC, ta có:

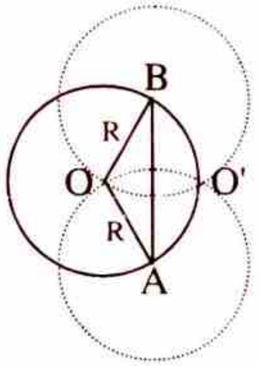
$AC \geq AB$ với AB là hằng số.

Do đó $AC_{min} = AB$, đạt được khi $C \equiv B$.

Vậy, đường tròn có đường kính nhỏ nhất là đường tròn đường kính AB.

**Ví dụ 2:** *Dựng một đường tròn (O) có bán kính R cho trước và đi qua hai điểm A và B cho trước.*

*Giải*




***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

- $A \in (O; R) \Rightarrow OA = R \Rightarrow O \in (A, R)$.
- $B \in (O; R) \Rightarrow OB = R \Rightarrow O \in (B, R)$.

Vậy, tâm O là giao của hai đường tròn (A, R) và (B, R).

***Cách dựng***: Ta lần lượt:

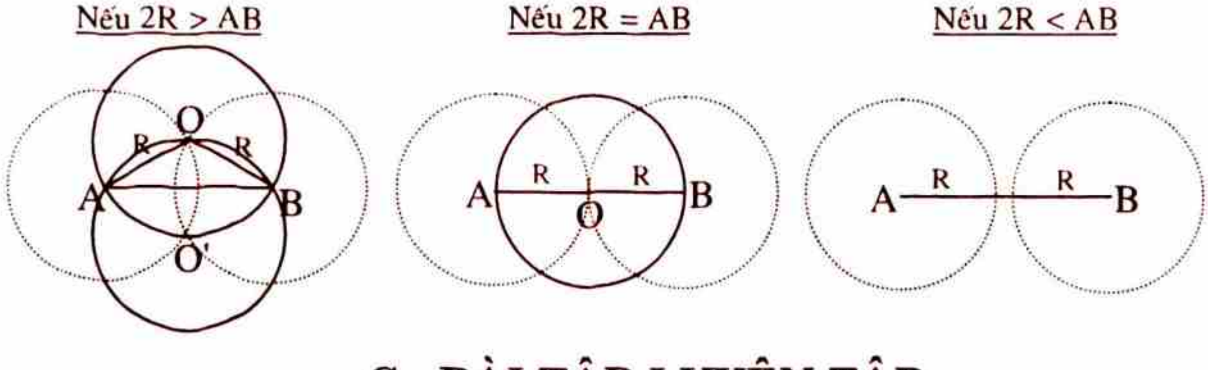
- Dựng các đường tròn (A, R) và (B, R) và gọi O là giao điểm của hai đường tròn đó.
- Dựng đường tròn (O; R).

***Chứng minh***: Theo cách dựng ta có:

$OA = OB = R \Rightarrow A, B \in (O; R)$.

***Biện luận***: Số nghiệm hình của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn (A, R) và (B, R), ta có:

- Nếu $2R > AB$ thì bài toán có hai nghiệm hình.
- Nếu $2R = AB$ thì bài toán có một nghiệm hình.
- Nếu $2R < AB$ thì bài toán không có nghiệm hình.




## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho $\Delta ABC$ đều. Gọi M, N, P theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng các điểm B, M, P, C thuộc một đường tròn.

**Bài 2:** Cho $\Delta ABC$ cân tại A, đường cao AH = 1cm, BC = 4cm. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng AH ở D.

a. Chứng minh rằng các điểm B, C thuộc đường tròn đường kính AD.

b. Tính độ dài AD.

**Bài 3:** Cho tứ giác ABCD có $\hat{C} + \hat{D} = 90^0$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 4:** Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 5:** Cho tứ giác ABCD có $\hat{B} = \hat{D} = 90^0$.

a. Chứng minh rằng bốn đỉnh của tứ giác cùng thuộc một đường tròn.

b. Chứng minh rằng $BD \le AC$. Tứ giác ABCD có thêm điều kiện gì để BD = AC .

**Bài 6:** Cho đường tròn (O, R), điểm A cố định trên đường tròn, điểm B di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB.

**Bài 7:** Cho đường tròn (O, R). Hai điểm A, B di chuyển trên đường tròn sao cho độ dài $AB = 2l$ không đổi ($l < R$). Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn AB.

**Bài 8:** Cho hình bình hành ABCD có cạnh AB cố định, đường chéo AC = 2cm. Tìm quỹ tích của điểm D.

**Bài 9:** Cho đường tròn (O, R) đường kính BC. Điểm A di động trên (O), gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

a. Chứng minh rằng PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O).

b. Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ.

**Bài 10:** Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn, đường cao AD. Dựng điểm M thuộc đường thẳng AD sao cho $\widehat{BMC} = 90^0$.

**Bài 11:** Cho đường thẳng d và một điểm A cách đường thẳng d là 1cm. Dựng đường tròn (O) có bán kính 1,5cm đi qua A và có tâm nằm trên đường thẳng d.

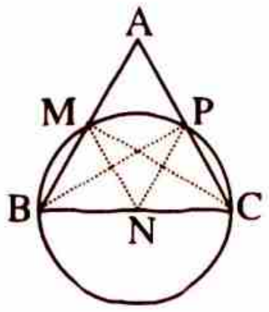
**Bài 12:** Dựng một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và B cho trước và có tâm ở trên đường thẳng d cho trước (A, B không thuộc d).

**Bài 13:** Cho năm điểm A, B, C, D, E. Biết rằng qua bốn điểm A, B, C, D có thể vẽ được một đường tròn, qua bốn điểm B, C, D, E cũng vẽ được một đường tròn. Hỏi qua cả năm điểm A, B, C, D, E có thể vẽ được một đường tròn không ?

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

*Cách 1*: Vì $\Delta ABC$ đều nên trung tuyến sẽ là đường cao, do đó:




- $CM \perp AB \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 90^0$

  $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn có đường kính BC.

- $BP \perp AC \Leftrightarrow \widehat{BPC} = 90^0$

  $\Rightarrow$ P thuộc đường tròn có đường kính BC.

Vậy bốn điểm B, C, M, P thuộc đường tròn có đường kính BC.

*Cách 2*: Ta có:

- $\Delta BMD$ vuông tại M và có MN là trung tuyến, nên:

  $MN = NB = NC$. (1)

- $\Delta BPC$ vuông tại P và có PN là trung tuyến, nên:

  $PN = NB = NC$. (2)

Từ (1), (2) suy ra:

$NB = NC = NM = NP \Leftrightarrow$ B, C, M, P thuộc đường tròn (N; NB).

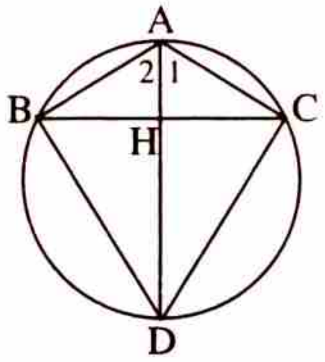
*Cách 2:* Với $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng a. Ta có:

- $NB = NC = \frac{a}{2}$. (3)
- MN là đường trung bình nên $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$. (4)
- PN là đường trung bình nên $PN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra:

$$NB = NC = NM = NP = \frac{a}{2} \Leftrightarrow B, C, M, P \text{ thuộc đường tròn } (N; \frac{a}{2}).$$

**Bài 2:**




a. Xét hai tam giác $\Delta ADC$ và $\Delta ADB$, ta có:

AD chung

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì $\Delta ABC$ cân nên AH là phân giác

AC = AB, vì $\Delta ABC$ cân tại A.

do đó:

$$\Delta ADC = \Delta ADB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$$

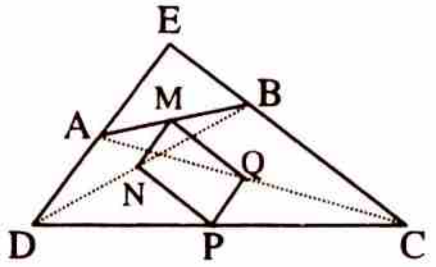
$\Leftrightarrow$ B, C thuộc đường tròn đường kính AD.

b. Trong $\Delta ABD$ vuông tại D, ta có:

$$AH.AD = AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow AD = \frac{AH^2 + \frac{BC^2}{4}}{AH} = 5cm.$$

Vậy, ta được AD = 5cm.

**Bài 3:** Giả sử AD cắt BC tại E.




Khi đó từ giả thiết $\hat{C} + \hat{D} = 90^0$, suy ra:

$$\hat{E} = 180^0 - (\hat{C} + \hat{D}) = 90^0.$$

Ta lần lượt có:

MN // AD // PQ

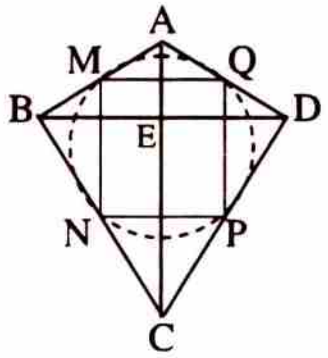
MQ // BC // PN

do đó, dựa trên tính chất của góc có cạnh tương ứng song song ta được:

$$\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ} = \hat{E} = 90^0.$$

$\Leftrightarrow$ M, N, P, Q thuộc đường tròn có đường kính NQ.

**Bài 4:** Vì M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD và DA nên theo tính chất đường trung bình ta có:




MN // AC // PQ

MQ // BD // PN

Mặt khác, theo giả thiết AC vuông góc với BD nên:

$$\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ} = 90^0.$$

$\Leftrightarrow$ M, N, P, Q thuộc đường tròn có đường kính NQ.

**Bài 5:** *Học sinh tự vẽ hình.*

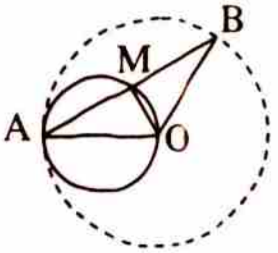
a. A, B, C, D thuộc đường tròn đường kính AC.

b. Ta luôn có: BD ≤ AC, vì dây cung nhỏ hơn đường kính.

Để có: BD = AC ⇔ BD là đường kính ⇔ $\hat{A} = \hat{C} = 90^0$

⇔ ABCD là hình chữ nhật.

**Bài 6:**




***Phần thuận***: Giả sử có điểm M là trung điểm của AB.

Xét ΔOAB, ta có:

OA = OB = R ⇔ ΔOAB cân tại O

⇒ OM vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

⇒ $\widehat{AMO} = 90^0$ ⇔ M thuộc đường tròn đường kính OA.

***Phần đảo***: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (OA), AM cắt (O) tại B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB.

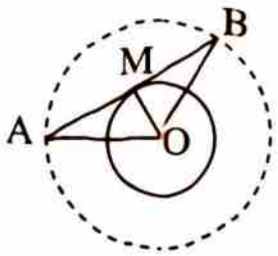
Thật vậy: M ∈ (OA) ⇔ $\widehat{AMO} = 90^0$ ⇔ OM ⊥ AB.

Khi đó, trong ΔOAB cân tại O ta có ngay:

OM là trung tuyến ⇔ MA = MB.

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (OA).

**Bài 7:**




***Phần thuận***: Giả sử có điểm M là trung điểm của AB.

Xét ΔOMA vuông tại M, ta có:

$OM^2 = OA^2 - MA^2 = R^2 - l^2 \Leftrightarrow OM = \sqrt{R^2 - l^2}$

⇔ M thuộc đường tròn (O, $\sqrt{R^2 - l^2}$ ).

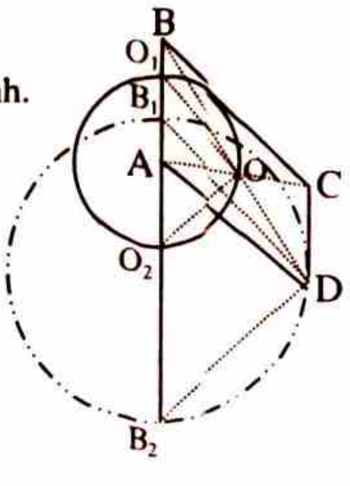
***Phần đảo***: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (O, $\sqrt{R^2 - l^2}$ ), đường thẳng qua M vuông góc với OM cắt (O, R) tại A và B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB và AB = 2*l*.

Thật vậy, ta thấy ngay M là trung điểm của AB, ngoài ra:

$$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = 2\sqrt{R^2 - (R^2 - l^2)} = 2l \text{ (đpcm).}$$

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (O, $\sqrt{R^2 - l^2}$ ).

**Bài 8:** Gọi O là giao điểm của AC và BD.




***Phần thuận***: Giả sử có điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Ta có: $OA = \frac{1}{2}AC = 1cm \Leftrightarrow O \in (A, 1)$.

Giả sử (A, 1) cắt đường thẳng AB tại $O_1$ và $O_2$ (cố định). Gọi $B_1$ và $B_2$ theo thứ tự là điểm đối xứng với B qua $O_1$ và $O_2$. Ta có ngay:

$\widehat{O_1OO_2} = 90^0$, góc chắn nửa đường tròn

$DB_1 // OO_1$, tính chất đường trung bình

$DB_2 // OO_2$, tính chất đường trung bình

suy ra:

$\widehat{B_1DB_2} = 90^0$ ⇔ D thuộc đường tròn đường kính $B_1B_2$.

***Phần đảo***: Lấy một điểm D bất kỳ trên đường tròn ($B_1B_2$), BD cắt (A, 1) tại O, lấy C đối xứng với A qua O. Ta phải chứng minh ABCD là hình bình hành có AC = 2cm.

Thật vậy, ta có ngay:

$AC = 2AO = 2cm.$

Mặt khác, dựa trên hình vẽ cùng với nhận xét:

$\widehat{O_1OO_2} = 90^0$ và $\widehat{B_1DB_2} = 90^0 \Rightarrow DB_1 // OO_1$.

Trong $\Delta BB_1D$, ta có:

$\begin{cases} BO_1 = B_1O_1 \\ DB_1 // OO_1 \end{cases} \Leftrightarrow OO_1$ là đường trung bình $\Rightarrow OB = OD$.

Khi đó, tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình bình hành.

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm D là đường tròn ($B_1B_2$).

**Bài 9:** *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Trong $\Delta ABC$, có PQ là đường trung bình, do đó:

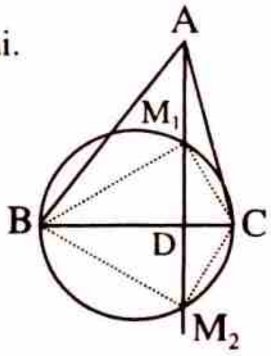
$$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.2R = R, \text{ không đổi.}$$

b. Từ kết quả câu a), suy ra A, M, O thẳng hàng và M là trung điểm OA, do đó:

$$OM = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (O, $\frac{R}{2}$).

**Bài 10:**




***Phân tích***: Giả sử đã dựng được điểm M thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có: $\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow M \in (BC)$.

Vậy, M là giao của đường thẳng AD với đường tròn (BC).

***Cách dựng*** : Ta lần lượt:

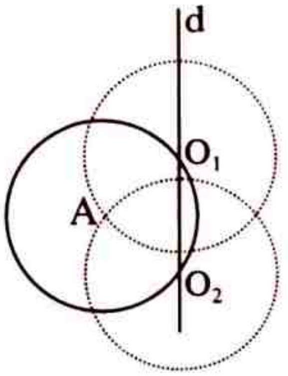
- Dựng (BC)
- Đường thẳng AD cắt đường tròn (BC) tại M.

Khi đó, M là điểm cần dựng.

***Chứng minh*** : Ta thấy ngay $\widehat{BMC} = 90^0$.

***Biện luận***: Vì đường thẳng AD cắt đường tròn (BC) tại hai điểm $M_1$ và $M_2$ nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là $M_1$ và $M_2$.

**Bài 11:**




***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có: OA = 1,5cm $\Rightarrow$ O $\in$ (A; 1,5cm).

Vậy, tâm O là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (A; 1,5cm).

***Cách dựng*** : Ta lần lượt:

- Dựng đường tròn (A; 1,5cm).
- d cắt đường tròn (A; 1,5cm) tại O.
- Dựng đường tròn (O; 1,5cm).

***Chứng minh*** : Ta thấy ngay (O; 1,5cm) thoả mãn điều kiện đầu bài.

***Biện luận***: Vì đường thẳng d cắt đường tròn (A; 1,5cm) tại hai điểm $O_1$ và $O_2$ nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là hai đường tròn ($O_1$; 1,5cm) và ($O_2$; 1,5cm).

**Bài 12:**

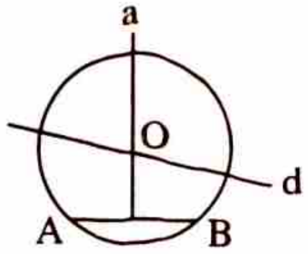
***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có:

$A, B \in (O)$

$\Rightarrow$ O nằm trên đường trung trực a của AB.

Vậy, tâm O là giao của a và d.




***Cách dựng*** : Ta lần lượt:

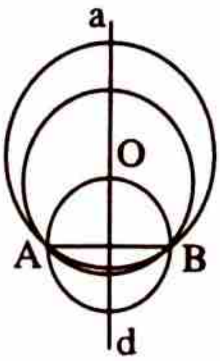
- Dựng đường trung trực a của AB.
- d cắt a tại O.
- Dựng đường tròn (O , OA).

***Chứng minh*** : Ta thấy ngay (O, OA) thoả mãn điều kiện đầu bài.

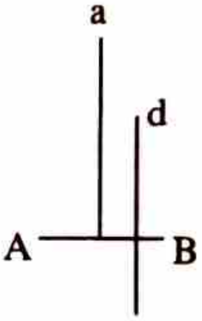
***Biện luận***: Vì với hai đường thẳng d và a ta có ba trường hợp về vị trí tương đối nên:

- Nếu $a \equiv d \Leftrightarrow$ d là trung trực của AB thì bài toán có vô số nghiệm hình.
- Nếu $a \parallel d \Leftrightarrow AB \perp d$ (d không là trung trực của AB) thì bài toán vô nghiệm.
- Nếu a cắt d thì bài toán có nghiệm hình duy nhất.

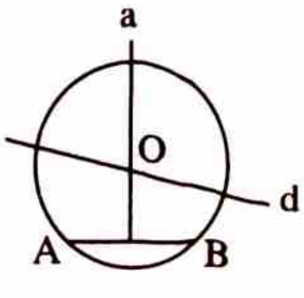
<u>Nếu d là trung trực của AB</u>




<u>Nếu AB ⊥ d và không là trung trực của AB</u>




<u>Nếu AB không vuông góc với d</u>




**Bài 13:** Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

Với giả thiết:

- Bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn ($O_1$), suy ra $(O_1) \equiv (O)$.
- Bốn điểm E, B, C, D thuộc đường tròn ($O_2$), suy ra $(O_2) \equiv (O)$.

Vậy, cả năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O).

**CHỦ ĐỀ 2** ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. SO SÁNH ĐỘ DÀI CỦA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY**

Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

**2. QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY**

Ta có các kết quả sau:

- Đường kính vuông góc với một dây thì chia dây ấy ra hai phần bằng nhau.
- Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không qua tâm) thì vuông góc với dây ấy.

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

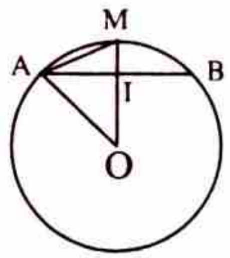
**Vấn đề 1: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG**

**Ví dụ 1:** *Cho đường tròn* (O; R) *và một dây cung* AB = 2a (a < R). *Gọi* I *là trung điểm của* AB. *Tia* OI *cắt cung* $\overset{\frown}{AB}$ *tại* M. *Tính độ dài của dây cung* MA.

*Giải*

Trong ΔAMI, ta có:

$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + MI^2$. (1)




Mặt khác:

$MI = OM - OI = R - OI$.

Trong ΔOAI, ta có:

$OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - a^2 \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$

$\Rightarrow MI = R - \sqrt{R^2 - a^2}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + (R - \sqrt{R^2 - a^2})^2$

$= a^2 + R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2} + R^2 - a^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}$

$\Rightarrow AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$.

Vậy, độ dài dây cung $AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên để tính độ dài dây cung AM chúng ta lựa chọn phương pháp trình bày theo hướng phát sinh yêu cầu rồi thực hiện yêu cầu này để đạt được mục đích cuối cùng là AM, cụ thể:

$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + MI^2 \Rightarrow$ cần xác định MI.

$MI = OM - OI = R - OI \Rightarrow$ cần xác định OI.

OI được xác định dựa vào $\Delta OAI$.

Từ đó, thay ngược lại kết quả để nhận được AM.

Cách trình bày như vậy sẽ rất dễ hiểu, tuy nhiên nó lại tỏ ra dài dòng, chính vì lý do này mà các em học sinh hãy lưu trữ nó trong suy nghĩ còn khi trình bày lời giải thì trình bày theo kiểu ngược lại, cụ thể:

| ***Suy nghĩ*** | ***Trình bày*** |
|---|---|
| 1. Để tính AM cần xác định MI.<br>2. Để tính MI cần xác định OI.<br>3. OI được xác định dựa vào $\Delta OAI$. | Trong $\Delta OAI$, ta có:<br>$OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - a^2$<br>$\Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$<br>Suy ra $MI = OM - OI = R - \sqrt{R^2 - a^2}$<br>Trong $\Delta AMI$, ta có:<br>$AM^2 = AI^2 + MI^2$<br>$= a^2 + (R - \sqrt{R^2 - a^2})^2$.<br>$\Rightarrow AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$. |

Các em học sinh có thể luyện tập bằng việc giải lại ví dụ trên trong trường hợp R = 5cm và a = 3cm.

**Ví dụ 2:** *Cho đường tròn* (O), *dây* AB = 2a *và khoảng cách từ nó tới tâm bằng* h. *Gọi* I *là trung điểm của* AB. *Tia* IO *cắt đường tròn tại* C.

a. *Chứng minh rằng* $\Delta ABC$ *là tam giác cân.*

b. *Tính khoảng cách từ* O *đến* BC.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$AI = IB = a \Rightarrow OI \perp AB$.

Suy ra $\Delta ABC$ có trung tuyến CI là đường cao nên là tam giác cân.

b. Hạ OH vuông góc với BC, ta có:

$$HB = HC = \frac{1}{2}BC.$$

Trong $\Delta OIB$, ta có:

$$OB^2 = IO^2 + IB^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow OB = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Ta có:

$$IC = IO + OC = IO + OB = h + \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Trong $\Delta IBC$, ta có:

$$BC^2 = IC^2 + IB^2 = (h + \sqrt{a^2 + h^2})^2 + a^2 = 2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)}$$

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)}.$$

Trong $\Delta OHB$, ta có:

$$OH^2 = OB - HB^2 = (\sqrt{a^2 + h^2})^2 - [\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)}]^2$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{\frac{a^2 - h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2}{2}}.$$

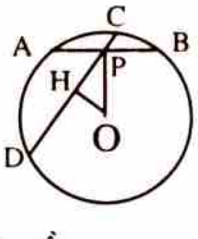
☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a) ta chỉ cần sử dụng kết quả "*Đường kính đi qua trung điểm của một dây thì vuông góc với dây ấy*", từ đó dẫn tới tam giác có trung tuyến là đường cao, do đó nó là tam giác vuông.
2. Ở câu b) chúng ta đã lựa chọn phương pháp trình bày ngược sau suy nghĩ theo kiểu phát sinh yêu cầu, cụ thể ta nghĩ :
   - Để tính OH cần xác định BH và OB.
   - $BH = \frac{1}{2}BC$ và BC được xác định thông qua $\Delta IBC$ nếu biết OC (tức là OB).
   - OB được xác định thông qua $\Delta OIB$.
3. Tất nhiên có thể tính OH thông qua sự đồng dạng của hai tam giác vuông là $\Delta OHC$ và $\Delta BIC$ – *Bạn đọc tự làm.*

Các em học sinh có thể luyện tập bằng việc giải lại ví dụ trên trong trường hợp a = 24cm và h = 7cm.

**Ví dụ 3:** *Cho một đường tròn (O) và điểm P ở bên trong đường tròn. Chứng minh rằng trong tất cả các dây cung đi qua P thì dây cung vuông góc với bán kính qua P là dây cung ngắn nhất.*

✍ *Giải*




Gọi AB là dây cung qua P và vuông góc với OP và CD là dây cung bất kỳ đi qua P.

Hạ OH vuông góc với CD, ta có ngay:

$OH \le OP$, vì trong tam giác vuông cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền

$\Rightarrow AB \le CD \Rightarrow$ AB là dây cung ngắn nhất.

## Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

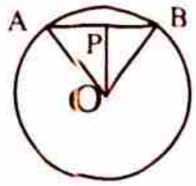
**Ví dụ 1:** *Cho một đường tròn* (O) *và một điểm* P *khác* O *ở bên trong đường tròn. Dựng một dây cung* AB *đi qua* P *sao cho* PA = PB.

✍ *Giải*

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được dây AB đi qua P sao cho PA = PB, ta có:

$$PA = PB \Rightarrow OP \perp AB.$$

***Cách dựng***: Dựng đường thẳng (d) qua P và vuông góc với OP cắt (O) tại hai điểm A, B.




***Chứng minh***: Vì :

$$OP \perp AB \Rightarrow PA = PB.$$

***Biện luận***: Bài toán có một nghiệm hình.

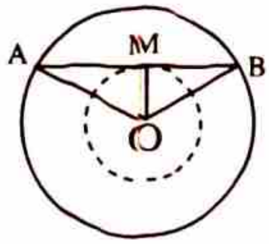
***Lưu ý***: Nếu $P \equiv O$; bài toán có vô số nghiệm hình.

## Vấn đề 3: GIẢI BÁI TOÁN QUỸ TÍCH

**Ví dụ 1:** *Cho đường tròn* (O; R). *Tìm quỹ tích trung điểm* M *của các dây* AB *sao cho* $\widehat{AOB} = 120^0$.

✍ *Giải*

***Phần thuận***: Giả sử có điểm M là trung điểm của dây cung AB sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.




Trong $\Delta OAM$, ta có:

$$\widehat{AOM} = 60^0 \Rightarrow \widehat{OAM} = 30^0$$

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2} \Rightarrow M \in (O; \frac{R}{2}).$$

***Phần đảo***: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn $(O; \frac{R}{2})$, dựng dây cung AB qua M và vuông góc với OM. Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = 120^0$.

Thật vậy, trong $\Delta OAM$ vuông tại M, ta có:

$$OM = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 30^0 \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 60^0$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 120^0.$$

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $(O; \frac{R}{2})$.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho đường tròn (O, R) và hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N).

a. Chứng minh rằng CM = DN.

b. Giả sử $\widehat{AOB} = 90^0$, hãy tính OM, ON theo R sao cho CM = MN = ND.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O, R) đường kính AB. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của OA và OB. Qua M và N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a. Chứng minh tứ giác CDFE là hình chữ nhật.

b. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn là $30^0$, tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

**Bài 3:** Cho ΔABC có ba góc nhọn. Ở phía ngoài tam giác vẽ các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB và AC. Qua A vẽ đường thẳng (d) cắt các nửa đường tròn trên thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng.

a. Nếu (d) song song với BC thì BEFC là hình chữ nhật.

b. Nếu (d) vuông góc với trung tuyến AM của ΔABC thì AE = AF.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Hạ OE vuông góc với AB cắt CD tại F.

Trong ΔOAB cân tại O, ta có:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow OF \perp MN \text{ và } MF = NF.$$

Ta có nhận xét thêm:

$$OF \perp MN \Leftrightarrow OF \perp CD \Leftrightarrow CF = DF.$$

Khi đó:

$$CM = CF - MF = DF - NF = DN \text{ (đpcm)}.$$

b. Đặt MF = x, suy ra:

$$CF = CM + MF = MN + MF = 3MF = 3x.$$

$$OF = x, \text{ vì } \Delta OMF \text{ vuông cân tại F}.$$

Trong ΔOCF, ta có:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2 - 9x^2 \Leftrightarrow 10x^2 = R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{10}}.$$

Khi đó, ta được:

$$ON = OM = OF\sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{10}}.\sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Vậy, với $ON = OM = \frac{R}{\sqrt{5}}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

**Bài 2:** *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Hạ OP vuông góc với CD cắt EF tại Q, suy ra:

CP = DP, tính chất đường kính vuông góc với dây cung.

$OQ \perp EF$, vì EF // CD

$\Rightarrow$ EQ = FQ, tính chất đường kính vuông góc với dây cung.

Xét hai tam giác vuông $\Delta OPM$ và $\Delta OQN$, ta có:

$$OM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OB = ON$$

$$\widehat{MOP} = \widehat{NOQ} \text{ (vì đối đỉnh)}$$

do đó:

$\Delta OPM = \Delta OQN$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow OP = OQ \Leftrightarrow CD = EF$.

Khi đó, tứ giác CDFE có:

$CD \overset{//}{=} EF \Leftrightarrow$ CDFE là hình bình hành.

Trong hình bình hành CDFE, ta có:

PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ \text{ // } CE \Rightarrow CD \perp CE$

$\Rightarrow$ CDFE là hình chữ nhật.

b. Ta có:

$$S_{CDFE} = CE.CD. \quad (1)$$

Trong $\Delta OPM$ vuông tại P, với $\widehat{OMP} = 30^0$, suy ra:

$$OP = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}OA = \frac{R}{4}.$$

$$CE = PQ = 2OP = \frac{R}{2}. \quad (2)$$

Trong $\Delta OPC$ vuông tại P, ta có:

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

$$CD = 2CP = \frac{R\sqrt{15}}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

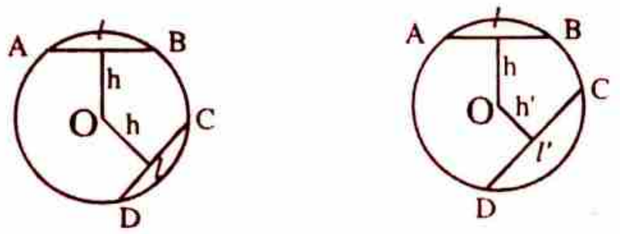
$$S_{CDFE} = \frac{R}{2}.\frac{R\sqrt{15}}{2} = \frac{R^2\sqrt{15}}{4}.$$

# CHỦ ĐỀ 3 LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ta có các kết quả sau:

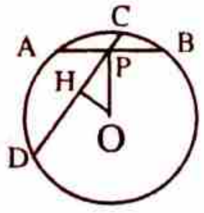
1. Trong một đường tròn hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
2. Trong hai dây không bằng nhau của một đường tròn dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.




Cả hai kết quả trên vẫn đúng với trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau) và nó tỏ ra rất hiệu quả trong bài toán cực trị.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Cho một đường tròn* (O) *và điểm* P *ở bên trong đường tròn. Chứng minh rằng trong tất cả các dây cung đi qua* P *thì dây cung vuông góc với bán kính qua* P *là dây cung ngắn nhất.*




✍ *Giải*

Gọi AB là dây cung qua P và vuông góc với OP và CD là dây cung bất kỳ đi qua P.

Hạ OH vuông góc với CD, ta có ngay:

$OH \leq OP$, vì trong tam giác vuông cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền

$\Rightarrow AB \leq CD \Rightarrow$ AB là dây cung ngắn nhất.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC sao cho AB < AC và tâm O nằm trong góc ABC. Chứng minh rằng $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích trung điểm M của các dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 60^0$.

**Bài 3:** Cho đường tròn (O) và một điểm A ở bên trong đường tròn đó ($A \neq O$). Dựng hình thoi ABCD sao cho B, C, D nằm trên đường tròn (O).

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** *Học sinh tự vẽ hình.*

Hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với AB và AC.

Từ giả thiết:

$AB < AC \Leftrightarrow OE > OF$.

Trên OE lấy điểm F' sao cho OF' = OF, ta thấy ngay điểm F' nằm giữa O và E, suy ra:

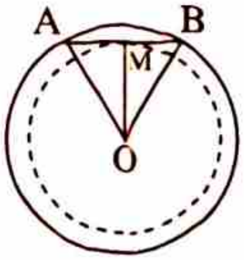
$\widehat{OAE} > \widehat{OAF'} = \widehat{OAF}$, vì ΔOAF = ΔOAF (cạnh huyền và cạnh góc vuông)

$\Leftrightarrow \widehat{OAB} > \widehat{OAC}$ (đpcm).

**Bài 2:**

***Phần thuận***: Giả sử có điểm M là trung điểm của dây cung AB sao cho $\widehat{AOB} = 60^0$.

Trong ΔOAB, ta có:




$OA = OB = R$ và $\widehat{AOB} = 60^0$

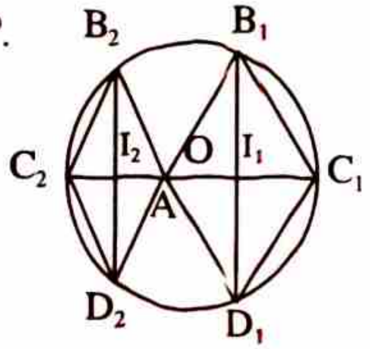
$\Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow OM = \dfrac{OA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow M \in (O, \dfrac{R\sqrt{3}}{2})$.

***Phần đảo***: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn $(O, \dfrac{R\sqrt{3}}{2})$, dựng dây cung AB qua M và vuông góc với OM. Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = 60^0$.

Thật vậy, trong ΔOAB cân tại O, ta có:

$OM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{OA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0$.




***Kết luận***: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $(O, \dfrac{R\sqrt{3}}{2})$.

**Bài 3:**

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được hình thoi ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

AC là đường trung trực của BD $\Rightarrow O \in AC$.

***Cách dựng***: Ta lần lượt thực hiện:

- Nối AO cắt đường tròn (O) tại C, lấy I là trung điểm AC.
- Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với AC cắt đường tròn (O) tại B và D.

Khi đó, ABCD là hình thoi cần dựng.

***Chứng minh***: Vì tứ giác ABCD có hai được vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình thoi.

***Biện luận***: Vì AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm $C_1$ và $C_2$ nên bài toán có hai nghiệm hình.

## CHỦ ĐỀ 4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Vị trí tương đối của đường thẳng (d) và đường tròn (O) được đánh giá thông qua số điểm chung của (d) với (O).

**BẢNG TÓM TẮT BA VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN**

| Vị trí tương đối | Số điểm chung | Hệ thức giữa d và R |
|---|---|---|
| 1. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau. | 0 | $d > R$ |
| 2. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn. | 1 | $d = R$ |
| 3. Đường thẳng cắt đường tròn. | 2 | $d < R$ |

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Cho đường thẳng* d *và điểm* O *không thuộc* d. *Hãy nêu cách dựng một đường tròn tâm* O *sao cho*:

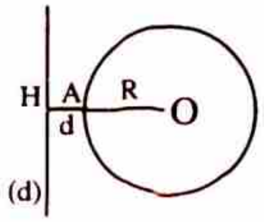
a. d *không cắt* (O).

b. d *tiếp xúc với* (O).

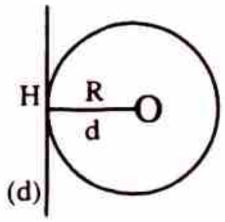
c. d *cắt* (O).

*Giải*

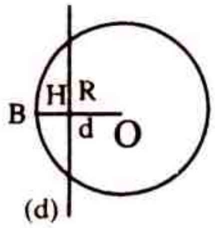
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d.




*Hình a*




*Hình b*




*Hình c*

a. (Hình a) Lấy điểm A nằm giữa O và H, rồi vẽ đường tròn (O; OA). Khi đó, đường thẳng d không cắt đường tròn (O; OA) bởi:

$R = OA < OH = d$.

b. (Hình b) Vẽ đường tròn (O; OH). Khi đó, đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O; OH) bởi:

$R = OH = d$.

c. (Hình c) Lấy điểm B nằm trên tia đối của tia HO, rồi vẽ đường tròn (O; OB).

Khi đó, đường thẳng d cắt đường tròn (O; OB) bởi:

$R = OB > OH = d$.

☛ ***Chú ý***: Như vậy, để xác định được vị trí tương đối của đường thẳng d với đường tròn (O; R) cho trước, ta cần thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1*: Hạ OH vuông góc với đường thẳng d.

*Bước 2*: Tính độ dài đoạn OH.

*Bước 3*: Thực hiện phép so sánh OH với R, từ đó đưa ra kết luận.

Ngoài ra:

1. Nếu ta có:

$$A \in d \text{ và A nằm trong } (O; R) \Rightarrow d \text{ cắt } (O; R)$$

đánh giá trên cho phép chúng ta nhận được lời giải đơn giản hơn rất nhiều.

2. $A \in d$, $A \in (O; R)$ và $OA \perp d$ thì d tiếp xúc với (O).
3. $A \in d$, $A \in (O; R)$ và OA không vuông góc với d thì d cắt đường tròn (O).

**Ví dụ 2:** *Cho góc* $\widehat{xAy}$ *khác góc bẹt. Dựng đường tròn* (O; R) *sao cho tia* Ay *qua* O, *đường thẳng* Ax *cắt* (O) *tại hai điểm* B *và* C *sao cho* BC = 2a, *với* a < R.

✍ *Giải*

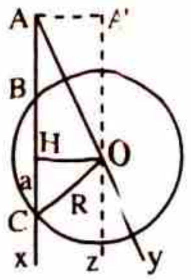
***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O; R) thoả mãn điều kiện

Hạ $OH \perp BC$, ta có:

$$OH^2 = OC^2 - HC^2 = R^2 - a^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - a^2} \text{ (không đổi)}$$

⇒ O thuộc đường thẳng song song và cách Ax một khoảng bằng OH.




***Cách dựng*** : Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).
- Trên Az lấy điểm A' sao cho $AA' = \sqrt{R^2 - a^2}$.
- Dựng đường thẳng (d) qua A' và song song với Ax, cắt tia Ay ở O.
- Dựng đường tròn (O; R).

***Chứng minh***: Trước hết theo cách dựng ta có (O; R) và O thuộc Ay, ta phải đi chứng minh BC = 2a.

Thật vậy, hạ $OH \perp BC$, ta có:

$$OH = AA' = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

$$BC = 2CH = 2\sqrt{OC^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - (R^2 - a^2)} = 2a$$

***Biện luận***: Bài toán có một nghiệm hình.

☛ **<u>Yêu cầu</u>**: Các em học sinh hãy thực hiện lại ví dụ trên cho các trường hợp a = R; a > R.

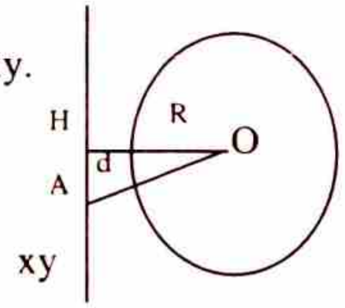
**Ví dụ 3:** *Chứng minh rằng:*

a. *Nếu đường thẳng* xy *không cắt đường tròn* (O; R) *thì mọi điểm của* xy *ở bên ngoài đường tròn đó.*

b. *Nếu đường thẳng* xy *đi qua một điểm bên trong đường tròn* (O; R) *thì phải cắt đường tròn này tại hai điểm phân biệt.*

c. *Nếu đường thẳng* xy *cắt đường tròn* (O; R) *tại hai điểm phân biệt* A, B *thì mọi điểm nằm giữa hai điểm* A *và* B *đều nằm bên trong đường tròn, các điểm còn lại (trừ* A, B*) nằm bên ngoài đường tròn đó.*

✍ *Giải*




Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng xy.

a. Từ giả thiết suy ra $OH > R$.

Gọi A là điểm bất kì trên xy, suy ra:

$OA \geq OH$ (Cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông)

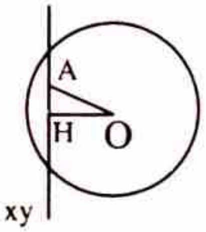
$\Rightarrow OA > R \Leftrightarrow$ A nằm ngoài đường tròn.

Vậy, mọi điểm của xy ở bên ngoài đường tròn (O; R).

b. Gọi A là điểm ở bên trong đường tròn (O; R) mà đường thẳng xy đi qua, ta có:

$OH \leq OA < R$

$\Leftrightarrow$ xy và (O; R) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

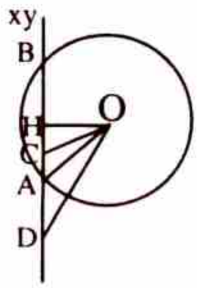



c. Gọi C là điểm bất kì nằm giữa A và B, ta có:

$HC < HA \Leftrightarrow OC < OA = R$

$\Leftrightarrow$ C nằm trong đường tròn (O; R)

Vậy, mọi điểm nằm giữa hai điểm A và B đều nằm bên trong đường tròn.




Gọi D là điểm bất kì nằm ngoài đoạn AB, ta có:

$HD > HA \Leftrightarrow OD > OA = R$

$\Leftrightarrow$ D nằm ngoài đường tròn (O; R)

Vậy, mọi điểm nằm ngoài đoạn AB đều nằm bên ngoài đường tròn.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên ngoài việc sử dụng kết quả về vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn chúng ta còn sử dụng kết quả về vị trí tương đối của điểm với đường tròn, cụ thể với đường tròn (O; R) và điểm M, ta có:

- Nếu $OM < R \Leftrightarrow$ M nằm trong đường tròn.
- Nếu $OM = R \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn.
- Nếu $OM > R \Leftrightarrow$ M nằm ngoài đường tròn.

# C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho góc x $\widehat{xAy}$ khác góc bẹt.

a. Dựng đường tròn (O, R) có tâm O thuộc Ay và tiếp xúc với đường thẳng Ax.

b. Dựng đường tròn (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay.

**Bài 2:** Cho góc nhọn $\widehat{xAy}$, điểm C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại C tâm O thuộc tia Ay.

**Bài 3:** Cho trước góc $\widehat{xAy}$ khác góc bẹt và một điểm B trên cạnh Ax. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua B và tiếp xúc với Ay tại A.

**Bài 4:** Cho đường thẳng d, điểm A thuộc đường thẳng điểm B nằm ngoài đương thẳng. Dựng đường thẳng (O) đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A.

**Bài 5:** Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ phân giác BI.

a. Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với các đường thẳng AB và BC.

b. Cho biết AB = a, tính IA từ đó suy ra $tg22^o30' = \sqrt{2} - 1$.

**Bài 6:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy OA làm đường kính vẽ nửa đường tròn cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB với nửa đường tròn (O) Trên nửa đường tròn đường kính OA lấy một điểm C (khác A và O). Tia OC cắt nửa đường tròn (O) tại D. Kẻ DH vuông góc AB. Chứng minh rằng tứ giác AHCD là hình thang cân.

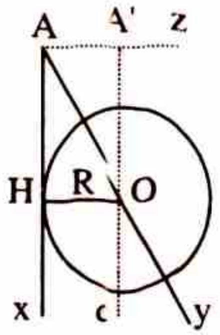
**Bài 7:** Gọi p, a, r và S lần lượt là nửa chu vi, cạnh huyền, bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích của một tam giác vuông. Chứng minh rằng:

a. r = p - a

b. S = p.a.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:**




a. Ta thực hiện theo các bước:

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O, R) thoả mãn điều kiện đầu bài. Hạ OH ⊥ Ay, ta có: OH = R

⇒ O thuộc đường thẳng d song song và cách Ax một khoảng bằng OH (d thuộc nửa mặt phẳng chứa Ax có bờ Ay).

***Cách dựng*** : Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).
- Trên Az lấy điểm A' sao cho AA' = R.
- Dựng đường thẳng d qua A' và song song với Ax, cắt tia Ay ở O.
- Dựng đường tròn (O, R).

***Chứng minh***: Trước hết theo cách dựng ta có (O, R) và O thuộc Ay, ta phải đi chứng minh (O, R) tiếp xúc với Ax.

Thật vậy, hạ OH ⊥ Ax, ta có:

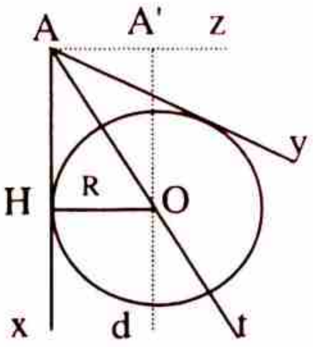
OH = AA' = R ⇔ (O, R) tiếp xúc với Ax.

***Biện luận***: Bài toán có một nghiệm hình.

b. Ta thực hiện theo các bước:

*Phân tích*: Giả sử đã dựng được đường tròn (O, R) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vì (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay nên tâm O thuộc tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$.




Hạ OH ⊥ Ay, ta có:

OH = R

⇒ O thuộc đường thẳng d song song và cách Ax một khoảng bằng OH (d thuộc nửa mặt phẳng chứa Ax có bờ Ay).

*Cách dựng* : Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng tia phân giác At của góc xÂy.
- Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).
- Trên Az lấy điểm A' sao cho AA' = R.
- Dựng đường thẳng d qua A' và song song với Ax, cắt tia At ở O.
- Dựng đường tròn (O, R).

*Chứng minh*: Trước hết theo cách dựng ta có (O, R) và O thuộc At, ta phải đi chứng minh (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay.

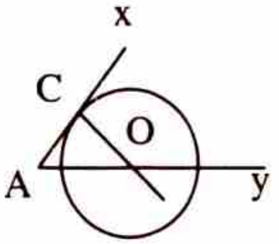
Thật vậy, hạ OH ⊥ Ax, ta có: OH = AA' = R ⇔ d(O, Ax) = d(O, Ay) = R

⇔ (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay.

*Biện luận*: Bài toán có một nghiệm hình.

**Bài 2:** *Hướng dẫn*:

Tâm O là giao điểm của đường thẳng d (d qua C và vuông góc với Ax) với tia Ay.

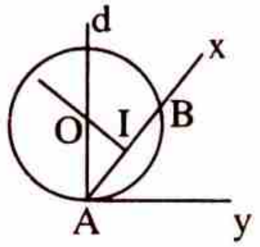



**Bài 3:** *Hướng dẫn*:

Tâm O là giao điểm của đường thẳng d (d qua A và vuông góc với Ay) với đường trung trực của đoạn AB.

**Bài 4:** *Tương tự bài tập 3.*

**Bài 5:**




a. Ta có:

IA ⊥ BA ⇔ IA = d(I, BA) ⇔ (I, IA) tiếp xúc với BA tại A.

Mặt khác:

BI là phân giác góc $\widehat{ABC}$

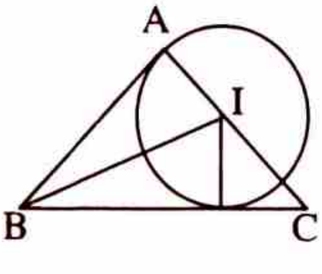
do đó (I, IA) tiếp xúc với BC.

b. Sử dụng tính chất của tia phân giác trong ΔABC, ta có:

$$\frac{IA}{BA} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{BA\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,IA = a - IA$$

$$\Leftrightarrow IA = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2} - 1).$$




Khi đó, trong ΔABI vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{ABI} = \frac{IA}{BA} \Leftrightarrow tg22^{0}30' = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a} = \sqrt{2} - 1 \text{ (đpcm)}.$$

## CHỦ ĐỀ 5 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

# A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. ĐỊNH NGHĨA**

***Định nghĩa**: Một đường thẳng được gọi là một tiếp tuyến của đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.*

Như vậy, ta có:

(d) là tiếp tuyến của (O) $\Leftrightarrow$ (d) $\cap$ (O) = {H}

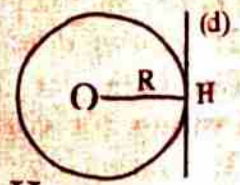
khi đó, ta nói " *đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H* ".

**2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN**

Ta có các kết quả sau:

- Nếu một đường thẳng là một tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- Nếu một đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

Ta có minh họa:




(d) là tiếp tuyến của (O) tại H $\Leftrightarrow$ (d) $\perp$ OH

hoặc viết:

$$\begin{cases} \text{Nếu } H \in (O) \text{ và } H \in (d) \\ (d) \perp OH \end{cases} \Leftrightarrow \text{(d) là tiếp tuyến của (O) tại H.}$$

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Vấn đề 1: DỰNG TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

***Phương pháp***

Các yêu cầu dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) cho trước thường gặp phải một trong ba dạng sau:

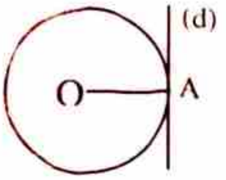
*Dạng 1*: Dựng tiếp tuyến đi qua điểm A cho trước.

*Dạng 2*: Dựng tiếp tuyến song song với đường thẳng a cho trước.

*Dạng 3*: Dựng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng a cho trước.

Phương pháp thực hiện các dạng toán trên được trình bày trong ba dạng toán sau:

***Dạng 1***: Từ một điểm A cho trước, hãy dựng tiếp tuyến với đường tròn (O) cho trước, biết:




a. Điểm A nằm trên đường tròn.
b. Điểm A nằm ngoài đường tròn.

***Phương pháp dựng***

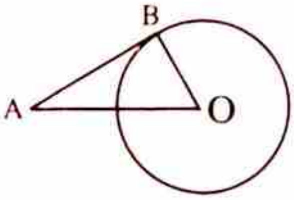
a. Vì A nằm trên đường tròn nên tiếp tuyến là đường thẳng qua A và vuông góc với OA.

b. Ta thực hiện theo bốn phần:

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến qua A tới đường tròn (O) và có tiếp điểm là B, ta có:

$\widehat{ABO} = 90^0$

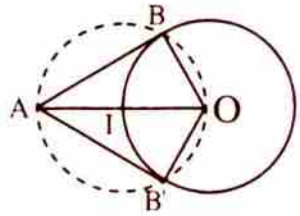
$\Rightarrow$ B thuộc đường tròn đường kính AO.




Vậy, B là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính AO.

***Cách dựng***: Ta thực hiện:

- Dựng đường tròn đường kính AO, kí hiệu (AO), đường tròn này cắt (O) tại B và B'.
- Dựng đường thẳng AB và AB', đó chính là các tiếp tuyến cần dựng.




***Chứng minh***: Trong đường tròn (AO) ta có ngay:

$\widehat{ABO} = 90^0 \Rightarrow$ AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

$\widehat{AB'O} = 90^0 \Rightarrow$ AB' là tiếp tuyến của đường tròn (O).

***Biện luận***: Bài toán có hai nghiệm hình (tức là, qua A luôn kẻ được hai tiếp tuyến tới (O)).

☛ ***Chú ý***: Nếu điểm A nằm trong đường tròn (O) thì qua A không thể kẻ được tiếp tuyến tới đường tròn (O).

**<u>Ví dụ 1:</u>** *Cho ΔABC vuông tại A. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm:*

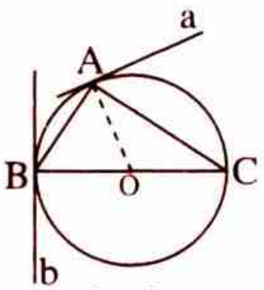
a. A. b. B.

✍ *Giải*

Vì ΔABC vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm O là trung điểm của BC.

a. Tiếp tuyến qua A là đường thẳng a qua A và vuông góc với OA.

b. Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với OB.

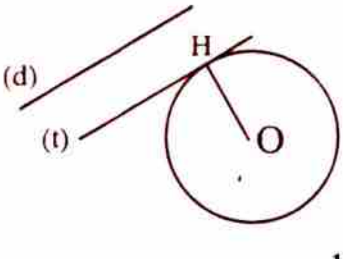



***Dạng 2***: Cho đường tròn (O) và một đường tròn (d). Dựng tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này song song với (d).

***Phương pháp dựng***

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến (t) của đường tròn (O) và tiếp tuyến song song với (d), gọi H là tiếp điểm, ta có:

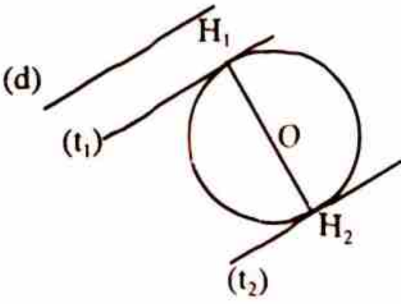
$$OH \perp (t) \overset{(t)//(d)}{\Leftrightarrow} OH \perp (d).$$



Vậy, tiếp điểm H là giao điểm của đường tròn (O) với đường thẳng qua O vuông góc với (d).

***Cách dựng***: Ta thực hiện:

- Dựng đường thẳng xOy ⊥ (d) và cắt (O) tại H.
- Dựng đường thẳng (t) qua H và vuông góc với OH, đó chính là tiếp tuyến cần dựng.




***Chứng minh***: Ta có ngay:

(t) ⊥ OH và (d) ⊥ OH

⇒ (t) // (d)

⇒ (t) là tiếp tuyến cần dựng.

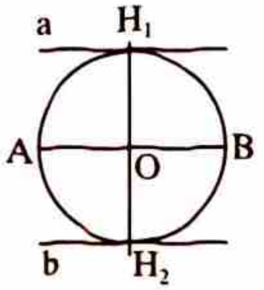
***Biện luận***: Bài toán có hai nghiệm hình.

**Ví dụ 2:** *Cho đường tròn đường kính* AB. *Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến với đường tròn, biết tiếp tuyến song song với* AB.

*Giải*

Gọi O là trung điểm của AB, ta thực hiện:

- Dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với AB. Đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm $H_1$ và $H_2$.
- Dựng hai đường thẳng a, b theo thứ tự đi qua hai điểm $H_1$, $H_2$ và song song với AB.



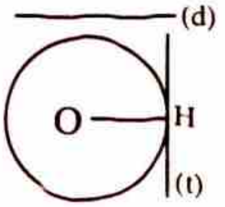

Khi đó, a, b là hai tiếp tuyến cần dựng.

*Dạng 3*: Cho đường tròn (O) và một đường thẳng (d). Dựng tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này vuông góc với (d).

***Phương pháp dựng***

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến (t) của đường tròn (O) và tiếp tuyến vuông góc với (d), gọi H là tiếp điểm, ta có:

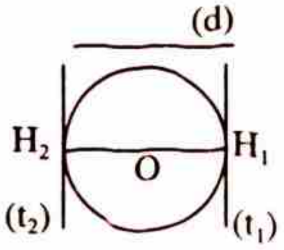
$$OH \perp (t) \overset{(t)\perp(d)}{\Leftrightarrow} OH \,//\, (d).$$




Vậy, tiếp điểm H là giao điểm của đường tròn (O) với đường thẳng qua O song song với (d).

***Cách dựng***: Ta thực hiện:

- Dựng đường thẳng xOy // (d) và cắt (O) tại H.
- Dựng đường thẳng (t) qua H và vuông góc với OH, đó chính là tiếp tuyến cần dựng.




***Chứng minh***: Ta có ngay:

(t) ⊥ OH và (d) // OH ⇒ (t) ⊥ (d)

⇒ (t) là tiếp tuyến cần dựng.

***Biện luận***: Bài toán có hai nghiệm hình.

**Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG**

*Phương pháp*

1. Với bài toán cho trước đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H, ta sẽ nhận được ngay các kết quả:

   $(d) \perp OH$ và $OH = R$.

2. Với bài toán cho trước AM và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), ta sẽ nhận được ngay các kết quả:

   $AM \perp OM$ và $AN \perp ON$,

   $AM = AN$ và $\widehat{MAO} = \widehat{NAO}$.

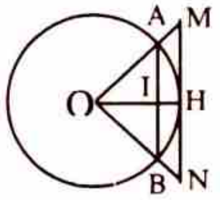
Dựa vào các kết quả trên ta thực hiện các yêu cầu của bài toán.

**Ví dụ 1:** *Cho đường tròn* (O; R) *và dây* AB = 2a. *Vẽ một tiếp tuyến song song với* AB, *nó cắt các tia* OA *và* OB *theo thứ tự tại* M *và* N. *Tính diện tích* ΔMON.

*Giải*

Gọi H là tiếp điểm và OH cắt AB tại I, ta có:

$OH \perp MN$ và $OH \perp AB$




Trong ΔOAI, ta có:

$$IA = \frac{AB}{2} = a.$$

$$OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - a^2 \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Vì ΔOAI ~ ΔOMH nên:

$$\frac{IA}{HM} = \frac{OI}{OH} \Rightarrow HM = \frac{IA.OH}{OI} = \frac{a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}} \Rightarrow MN = 2HM = \frac{2a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Ta có:

$$S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}OH.MN = \frac{1}{2}R.\frac{2a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{a.R^2}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

***Nhận xét***: Trong lời giải trên chúng ta đã lựa chọn phương pháp trình bày ngược sau suy nghĩ theo kiểu phát sinh yêu cầu, cụ thể ta nghĩ :

- Để tính $S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}OH.MN$ cần xác định MN, tức là cần xác định HM (vì MN = 2HM).
- HM được xác định thông qua sự đồng dạng của ΔOAI và ΔOMH, từ đó cần xác định IA và OI.
- $IA = \frac{1}{2}AB$ còn OI được xác định thông qua ΔOIA.

**Ví dụ 2:** *Cho nửa đường tròn (O) với đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N. Chứng minh rằng:*

a. MN // AC.    b. CM.DB = CD.MN.

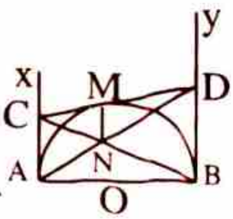
✍ *Giải*

a. Theo tính chất của tiếp tuyến ta có ngay:

DB = DM, AC = MC.

Mặt khác, vì Ax // By nên hai tam giác ΔANC và ΔDNB đồng dạng, suy ra:

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DB}{AC} = \frac{DM}{CM} \Rightarrow MN \,//\, AC \text{ (định lí Talet đảo).}$$




b. Từ kết quả câu a) suy ra

$$MN \,//\, BD \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{MN}{DB} \Leftrightarrow CM.DB = CD.MN \text{ (đpcm).}$$

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a) để chứng minh MN // AC, ta suy nghĩ theo điều kiện tương đương, tức là giả sử có :

$$MN \,//\, AC \Leftrightarrow \frac{ND}{NA} = \frac{MD}{MC} \overset{MD=DB}{\underset{MC=AC}{=}} \frac{DB}{AC},$$

luôn đúng vì Ax // By.

Do vậy, khi trình bày lời giải chúng ta đã xuất phát từ kết quả DB = DM, AC = MC cùng với giả thiết Ax//By.

2. Ở câu b) vẫn với suy nghĩ như trong a) ta giả sử có:

$$CM.DB = CD.MN \Leftrightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{MN}{DB} \Leftrightarrow MN \,//\, BD \,//\, AC.$$

Do vậy, khi trình bày lời giải chúng ta đã xuất phát từ giả thiết Ax // By cùng kết quả thu được trong a) để có nhận xét MN // BD.

**Vấn đề 3: CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

*Phương pháp*

Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O; R), ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Nếu biết một giao điểm A của d và (O) thì ta đi chứng minh:

$OA \perp d$.

*Cách 2*: Hạ OA vuông góc với d, ta đi chứng minh:

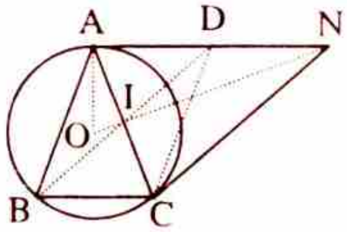
OA = R.

**Ví dụ 1:** *Cho* ΔABC *cân tại* A *nội tiếp đường tròn tâm* O. *Vẽ hình bình hành* ABCD. *Tiếp tuyến tại* C *của đường tròn cắt đường thẳng* AD *tại* N. *Chứng minh rằng:*

a. *Đường thẳng* AD *là tiếp tuyến của đường tròn* (O).

b. *Ba đường thẳng* AC, BD *và* ON *cùng đi qua một điểm.*

✍ *Giải*




a. Vì ΔABC cân tại A nên:

$OA \perp BC$.

Vì ABCD là hình bình hành nên:

$AD \,//\, BC \Rightarrow AD \perp OA$

$\Leftrightarrow$ AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b. Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra:

I là trung điểm AC

$\Rightarrow I \in ON$ (vì NA, NC đều là tiếp tuyến của (O))

Vậy, ba đường thẳng AC, BD và ON cùng đi qua điểm I.

☛ ***Nhận xét***:

1. Như vậy, trong ví dụ trên để chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn (O), ta chỉ phải đi chứng minh $AD \perp OA$ bởi A thuộc (O).
2. Với yêu cầu ngược lại " *Tìm điều kiện để đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)* ", ta cần có:

$d(O, d) = R.$

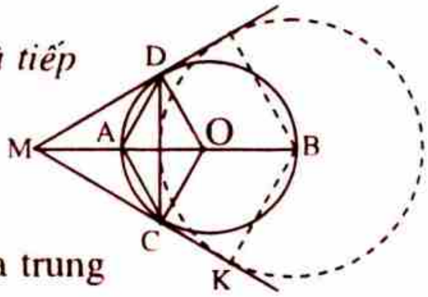
**Ví dụ 2:** *Cho đường tròn* (O), *đường kính* AB. *Vẽ* CD *vuông góc với* OA *tại trung điểm* I *của* OA. *Các tiếp tuyến với đường tròn tại* C *và tại* D *cắt nhau ở* M.

a. *Chứng minh rằng ba điểm* M, A, B *thẳng hàng.*

b. *Tứ giác* OCAD *là hình gì* ?

c. *Tính* $\widehat{CMD}$.

d. *Chứng minh rằng đường thẳng* MC *là tiếp tuyến của đường tròn* (B, BI).




✍ *Giải*

a. Ta có nhận xét:

- AB là đường trung trực của CD (vì nó đi qua trung điểm I của CD và vuông góc với CD).
- MC = MD (tính chất giao điểm của hai tiếp tuyến ) $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực của CD $\Rightarrow$ M thuộc AB.

Vậy, ba điểm M, A, B thẳng hàng.

b. Tứ giác OCAD có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình thoi.

c. Trong $\Delta AOC$ ta có:

$$OA = OC = CA \Leftrightarrow \Delta AOC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0$$

$$\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^0 - 60^0 = 30^0 \Rightarrow \widehat{CMD} = 60^0.$$

d. Hạ BK vuông góc với MC, ta có nhận xét:

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 30^0 \Rightarrow$ CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCD}$.

$AC \perp BC \Rightarrow$ CB là tia phân giác của góc $\widehat{KCD} \Rightarrow BI = BK$.

Khoảng cách BK bằng bán kính đường kính đường tròn (B, BI) nên MC là tiếp tuyến của đường tròn (B, BI).

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a) để chứng minh M, A, B thẳng hàng chúng ta xác định vị trí của chúng đối với CD và cụ thể chúng nằm trên đường trung trực của CD do đó xuất phát từ nhận xét AB là trung trực của CD chúng ta cần chứng minh M cũng thuộc trung trực của CD, điều này chỉ xảy ra khi MC = MD.
2. Ở câu b) chúng ta sử dụng kết quả " *Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường* ".
3. Ở câu c) chúng ta sử dụng kết quả câu b) và tính chất thứ 3 của tiếp tuyến đường tròn.
4. Ở câu c) chúng ta sử dụng kết quả về vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn để đưa ra kết luận cho tiếp tuyến MC, và dễ thấy MD cũng là tiếp tuyến của (B, BI).
5. Các kết quả ở câu a) và câu d) vẫn đúng nếu thay điều kện "*trung điểm I của OA*" bởi "*I nằm giữa O và A*". Trong trường hợp này ta chứng minh $\widehat{MCA} = \widehat{ACD}$ bằng nhận xét $\widehat{MCA}$ phụ $\widehat{ACO}$, $\widehat{ACD}$ phụ $\widehat{CAO}$, mà $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{ACD}$.

## Vấn đề 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN TÌM QUĨ TÍCH ĐIỂM

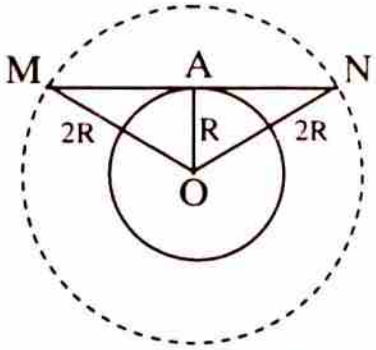
*Phương pháp*

Việc sử dụng tính chất của tiếp tuyến để tìm quỹ tích điểm M, được hiểu là việc khai thác các tính chất đó để chỉ ra tính chất của điểm M trong phần thuận của bài toán quỹ tích.

**Ví dụ 1:** *Cho đường tròn* (O; 2cm) *và một điểm* A *chạy trên đường tròn đó. Từ* A *vẽ tiếp tuyến* xy. *Trên tia* Ax *lấy điểm* M, *trên tia* Ay *lấy điểm* N *sao cho* $AM = AN = 2\sqrt{3}$ cm. *Tìm quỹ tích các điểm* M *và* N.

✍ *Giải*

***Phần thuận***: Với hai điểm M, N điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.




Trong ΔOMN, ta có:

OA là đường cao và trung tuyến

⇔ ΔOMN cân tại O ⇔ OM = ON.

Trong ΔOAM vuông tại A, ta có:

$OM = \sqrt{OA^2 + MA^2} = \sqrt{R^2 + 3R^2} = 2R.$

⇔ M, N thuộc đường tròn (O, 2R).

***Phần đảo***: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn (O; R). Từ A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O; R), tiếp tuyến này cắt (O, 2R) tại M và N. Ta phải chứng minh $AM = AN = R\sqrt{3}$.

Ta có ngay AM = AN.

Trong ΔOAM vuông tại A, ta có:

$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$

***Kết luận***: Quỹ tích của các điểm M, N là đường tròn (O, 2R).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải trên chúng ta đã khai thác hai tính chất của tiếp tuyến MN, bao gồm:

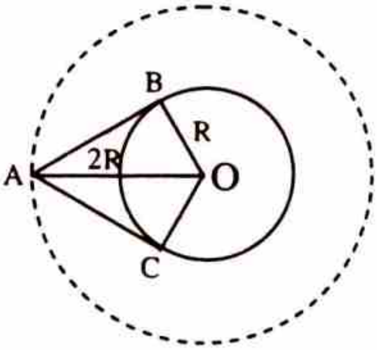
- OA ⊥ MN từ đó áp dụng vào ΔOMN cân tại O.
- OA = R từ đó áp dụng vào ΔOAM vuông tại A.

Trong ví dụ tiếp theo, chúng ta đi thực hiện một ví dụ cơ bản về bài toán quỹ tích điểm thoả mãn tính chất tiếp tuyến, hãy nhớ rằng dạng toán này sẽ được gặp lại trong chương trình toán THPT.

**Ví dụ 2:** *Cho đường tròn* (O; R). *Tìm quỹ tích của điểm* A *mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến* AB, AC *tới* (O; R) *sao cho* $\widehat{BAC} = 60^0$.

✍ *Giải*

***Phần thuận***: Giả sử tồn tại điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.




Trong ΔOAB, ta có:

$\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^0$

$\Rightarrow OB = \frac{1}{2}OA \Leftrightarrow OA = 2OB = 2R$

⇒ A thuộc đường tròn (O, 2R).

***Phần đảo***: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn (O, 2R). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O; R). Ta phải chứng minh $\widehat{BAC} = 60^0$.

Trong ΔOAB, ta có:

$$OB = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 60^0.$$

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm A là đường tròn (O, 2R).

☛ ***Nhận xét***:

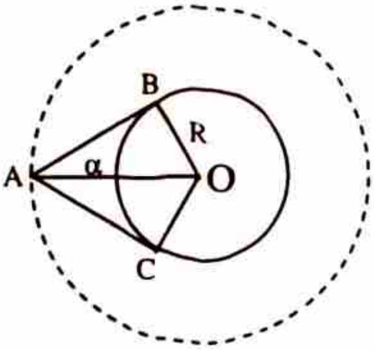
1. Trong lời giải trên, dựa vào dạng đặc biệt của ΔOAB vuông tại B, chúng ta tính được độ dài đoạn OA. Tuy nhiên, trong mọi trường hợp ta đều có thể tính được độ dài đoạn OA bằng cách sử dụng hệ thức lượng giác của hàm số $\sin\widehat{BAO}$.
2. Chúng ta sẽ đi giải bài toán tổng quát là:

   " *Cho đường tròn* (O; R). *Tìm quỹ tích của điểm* A *mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến* AB, AC *tới* (O; R) *sao cho* $\widehat{BAC} = 2\alpha$ ".

Ta sẽ lần lượt thực hiện:

***Phần thuận***: Giả sử tồn tại điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.

Trong ΔOAB, ta có:




$$\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \alpha$$

$$OA = \frac{OB}{\sin\widehat{BAO}} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

$\Rightarrow$ A thuộc đường tròn $(O, \frac{R}{\sin\alpha})$.

***Phần đảo***: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn $(O, \frac{R}{\sin\alpha})$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O; R). Ta phải chứng minh $\widehat{BAC} = 2\alpha$.

Trong ΔOAB, ta có:

$$\sin\widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{\frac{R}{\sin\alpha}} = \sin\alpha \Rightarrow \widehat{BAO} = \alpha \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = \alpha.$$

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm A là đường tròn $(O, \frac{R}{\sin\alpha})$.

# C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho ΔABC cân A. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A. Chứng minh rằng d // BC.

**Bài 2:** Cho ΔABC vuông cân tại A.

a. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A. Chứng minh rằng a // BC.

b. Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng các tiếp tuyến này theo thứ tự đi qua điểm B, C. Chứng minh rằng b // c.

**Bài 3:** Cho ΔABC đều.

a. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A. Chứng minh rằng d // BC.

b. Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng các tiếp tuyến này theo thứ tự đi qua điểm B, C. Giả sử b cắt c tại D. Chứng minh rằng ΔBCD đều.

**Bài 4:** Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn cắt AB tại M, cắt AC tại N. Cho biết dạng của ΔABC và tính chu vi của ΔAMN trong các trường hợp sau:

a. OA = 2R. b. $OA = R\sqrt{2}$.

**Bài 5:** Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC, kẻ một tiếp tuyến thứ ba, cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Khẳng định khi điểm M chuyển động trên cung BC thì chu vi ΔAPQ có giá trị không đổi là đúng hay sai ?

**Bài 6:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Vẽ AD và BC vuông góc với xy.

a. Khẳng định MC = MD là đúng hay sai ?

b. Khẳng định AD + BC có giá trị không đổi khi điểm M chuyển động trên nửa đường tròn là đúng hay sai ?

c. Khẳng định đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB là đúng hay sai ?

d. Xác định vị của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

**Bài 7:** Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, d là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và tại C cắt d theo thứ tự ở D và E.

a. Tính $\widehat{DOE}$.

b. Khẳng định DE = BD + CE là đúng hay sai ?

c. Khẳng định $BD.CE = R^2$ (R là bán kính đường tròn (O) là đúng hay sai ?

d. Khẳng định BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính DE là đúng hay sai ?

**Bài 8:** Cho $\Delta ABC$ cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau ở H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

a. Khẳng định BC = 2ED là đúng hay sai ?

b. Khẳng định DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) là đúng hay sai ?

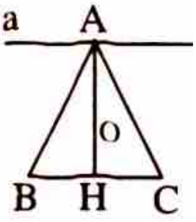
c. Tính độ dài DE biết DH = 2cm, HA = 6cm.

**Bài 9:** Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M.

a. Xác định dạng của tứ giác AMON.

b. Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) ?

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

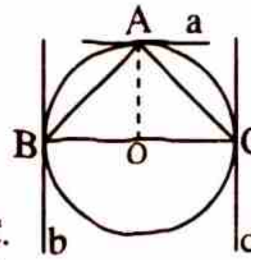



**Bài 1:** Vì $\Delta ABC$ cân tại A nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ thuộc đường cao AH, do đó:

$AO \perp BC$.

Vậy, tiếp tuyến qua A là đường thẳng a qua A và song song với BC.

**Bài 2:** Vì $\Delta ABC$ vuông cân tại A nên đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ có tâm O là trung điểm của BC.




a. Tiếp tuyến qua A là đường thẳng a qua A và vuông góc với OA.

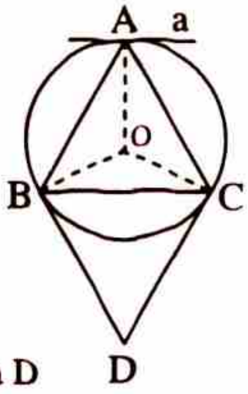
Vì $AO \perp BC$ nên a // BC (đpcm).

b. Ta có ngay:

- Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với BC.
- Tiếp tuyến qua C là đường thẳng c qua C và vuông góc với BC.

Từ đó, thấy ngay b // c (đpcm).

**Bài 3:** *Hướng dẫn*:




a. Tham khảo bài tập 1.

b. Ta có ngay:

- Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với OB.
- Tiếp tuyến qua C là đường thẳng c qua C và vuông góc với OC.

Xét $\Delta BCD$, ta có:

DB = DC, tính chất hai tiếp tuyến với đường tròn cùng đi qua D

$\widehat{CBD} = \widehat{OBD} - \widehat{OBC} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

do đó $\Delta BCD$ đều (tam giác cân có một góc bằng $60^0$).

**Bài 4:** Ta đã biết:

$S_{\Delta AMN} = AB + AC = 2AB.$

Để xác định dạng của $\Delta ABC$ (cân tại A), ta xét:

$$\sin\widehat{OAB} = \frac{OB}{OA}.$$

a. Với $OA = 2R$, ta được:

$$\sin\widehat{OAB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 30^0 \Leftrightarrow \widehat{CAB} = 60^0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Khi đó:

$$S_{\Delta AMN} = 2AB = 2\sqrt{OA^2 - OB^2} = 2\sqrt{4R^2 - R^2} = 2R\sqrt{3}.$$

b. Với $OA = R\sqrt{2}$, ta được:

$$\sin\widehat{OAB} = \frac{R}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \hat{OAB} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{CAB} = 90^0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A.}$$

Khi đó:

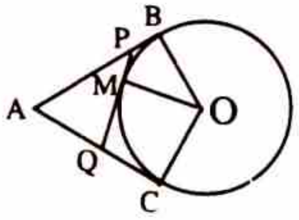
$$S_{\Delta AMN} = 2AB = 2\sqrt{OA^2 - OB^2} = 2\sqrt{2R^2 - R^2} = 2R.$$

**Bài 5:** Chu vi $\Delta APQ$ được cho bởi:

$P = AP + PQ + QA = AP + PM + MQ + QA$

$= AP + PB + QC + QA = AB + AC$, không đổi.

Vậy chu vi $\Delta APQ$ không đổi.




**Bài 6:**

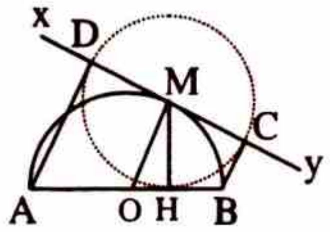
a. Xét tứ giác ABCD, ta có:

AD // BC, vì cùng vuông góc với xy

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang vuông.

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{cases} OA = OB \\ OM // AD \end{cases} \Leftrightarrow \text{OM là đường trung bình} \Rightarrow MC = MD.$$




b. Dựa theo kết quả câu a), ta được:

$AD + BC = 2OM = 2R$ – không đổi.

c. Hạ MH vuông góc với AB, ta có ngay $MH = MC$.

Vậy, đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

d. Ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).CD = \frac{1}{2}.2R.CD = R.CD.$$

Do đó, $S_{ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi CD lớn nhất.

Trong hình thang vuông ABCD, ta có nhận xét:

$CD \le AB = 2R \Rightarrow CD_{Max} = 2R$

đạt được khi ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow OM \perp AB$

$\Leftrightarrow$ M là điểm giữa của cung tròn đường kính AB.

**Bài 7:** *Học sinh tự vẽ hình*: Vì $\Delta ABC$ vuông tại A nên O là trung điểm BC.

a. Nhận xét rằng:

DA, DB là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow$ DA = DB và $\widehat{DOA} = \widehat{DOB}$.

EA, EC là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow$ EA = EC và $\widehat{EOA} = \widehat{EOC}$.

Suy ra:

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOA} + \widehat{EOA} = \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0.$$

b. Dựa trên kết quả câu a), ta có ngay:

DE = DA + EA = DB + EC (đpcm).

c. Xét hai tam giác vuông $\Delta OBD$ và $\Delta ECO$, ta có:

$\widehat{BOD} = \widehat{CEO}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc

do đó:

$$\Delta OBD \backsim \Delta ECO \Rightarrow \frac{OB}{EC} = \frac{BD}{CO} \Leftrightarrow BD\,.\,CE = OB.OC = R.R = R^2$$

d. Gọi I là trung điểm DE, suy ra I là tâm đường tròn (DE).

Trong hình thang vuông BCED, ta có:

OI là đường trung bình $\Rightarrow$ OI // BD $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC, vì BC vuông góc với BD

$\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

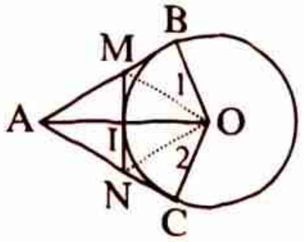
**Bài 8:** *Học sinh tự vẽ hình:* Vì $\Delta ABC$ cân tại A, đường cao AD do đó D là trung điểm BC.

a. Trong $\Delta BCE$, vuông tại E, ta có:

ED là trung tuyến thuộc cạnh huyền $\Rightarrow$ BC = 2ED.

b. Chứng minh DE vuông góc với OE.

**Bài 9:**




a. Xét tứ giác AMON, ta có:

AM // ON, vì cùng vuông góc với OB.

AN // OM, vì cùng vuông góc với OC.

do đó AMON là hình bình hành.

Mặt khác, xét hai tam giác vuông $\Delta OBM$ và $\Delta OCN$, ta có:

OB = OC = R

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì cùng phụ với góc $\widehat{MON}$ MÔN

do đó:

$\Delta OBM = \Delta OCN$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow$ OM = ON.

Vậy, AMON là hình thoi (vì nó là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau).

b. Để MN tiếp xúc với (O; R) điều kiện là:

d(O, MN) = R $\Leftrightarrow$ OI = R $\Leftrightarrow$ AO = 2R.

Vậy, với OA = 2R thì MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**CHỦ ĐỀ 6** TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

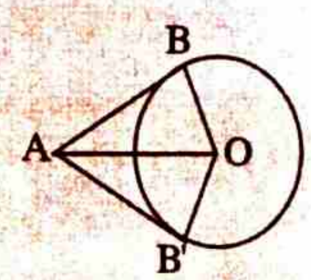
## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Với hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm, ta có kết quả *"Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì giao điểm này cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm của đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến"*

Như vậy:

AB và AB' là hai tiếp tuyến của (O)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AB' \\ \widehat{OAB} = \widehat{OAB'} \end{cases}$$

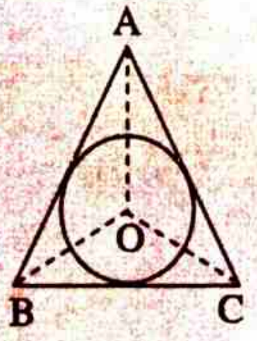



### 3. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

***Định nghĩa**: Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác.*

Khi đó:

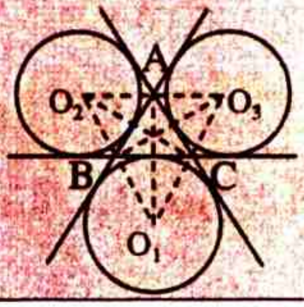
1. Tam giác đó gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.
2. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác (trong thực tế ta chỉ cần lấy giao điểm của hai đường phân giác bởi trong một tam giác ba đường phân giác đồng qui).




### 4. ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

***Định nghĩa**: Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp của tam giác.*

Như vậy, với ΔABC tồn tại ba đường tròn bàng tiếp và tâm của một đường tròn bàng tiếp là giao điểm của một đường phân giác trong với hai phân giác ngoài.



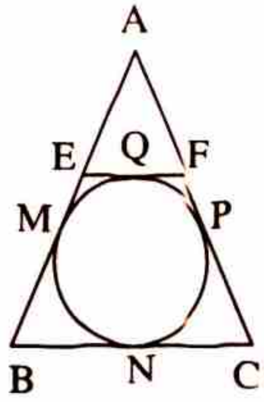

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Cho* ΔABC, *biết* BC = 6. *Lấy* E, F *theo thứ tự thuộc* AB, AC *sao cho* EF *song song với* BC *và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp* ΔABC. *Tính chu* vi ΔABC, *biết* EF = 2cm.

✍ *Giải*

Ta có hai ΔAEF và ΔABC đồng dạng, do đó:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}. \qquad (1)$$




Ta có:

$$\begin{cases} c = AB = AM + MB = AM + NB \\ b = AC = AP + PC = AM + NC \end{cases}$$

$$\Rightarrow b + c = 2AM + BC = 2AM + 6$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a. \qquad (2)$$

$$\begin{cases} AM = AE + EM = AE + EQ \\ AM = AP = AF + FP = AF + FQ \end{cases} \Rightarrow 2AM = AE + AF + EF$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = p_{\Delta AEF}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{2}{6} = \frac{p-6}{p} \Leftrightarrow p = 9cm.$$

Vậy chu vi của ΔABC bằng 18cm.

**Ví dụ 2:** *Cho ΔABC có độ dài ba cạnh* a, b, c *và diện tích bằng* S. *Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh* BC, CA, AB *theo thứ tự tại* $A_1$, $B_1$, $C_1$. *Giả sử* $\Delta A_1B_1C_1$ *có độ dài ba cạnh tương ứng là* $a_1$, $b_1$, $c_1$. *Chứng minh rằng*:

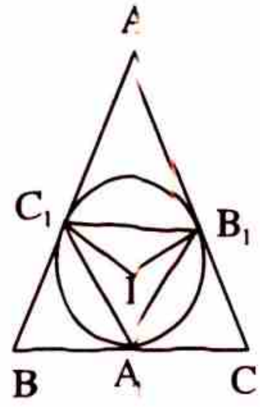
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right).\sin\frac{C}{2}.$$

✍ *Giải*

Trong $\Delta A_1B_1C_1$ ta có:

$$a_1 = B_1C_1 = 2r.\sin A_1 = 2r.\sin\frac{\widehat{B_1IC_1}}{2} = 2r.\sin\frac{\pi - A}{2} = 2r.\cos\frac{A}{2},$$

tương tự ta được $b_1 = 2r.\cos\frac{B}{2}$.




Trong ΔBIC ta có:

$$a = BC = BA_1 + CA_1 = r.\cot\frac{B}{2} + r.\cot\frac{C}{2}$$

$$= r.\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} = \frac{r.\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}},$$

tương tự ta được $b = \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}$.

Từ đó:

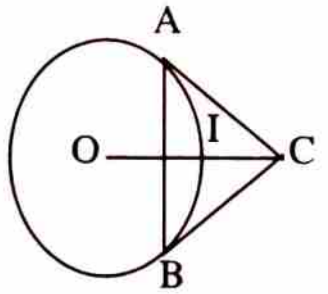
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2} = 2(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}).\sin\frac{C}{2}.$$

**Ví dụ 3:** *Cho đường tròn* (O), A *là điểm cố định trên* (O), *còn* B *là điểm di động trên* (O). *Các tiếp tuyến của* (O) *tại* A *và* B *cắt nhau tại* C. *Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp* ΔABC.

*Giải*

Gọi I là giao điểm của OC với (O), ta có ngay AI là phân giác góc A, từ đó suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Vậy tập hợp tâm I thuộc đường tròn (C), ngoại trừ bốn điểm A, $A_1$, $A_2$, trong đó $A_1A_2$ là đường kính vuông góc với OA.




## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho ΔABC đều.

a. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A.

b. Khẳng định d // BC là đúng hay sai ?

c. Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng các tiếp tuyến này theo thứ tự đi qua điểm B, C. Giả sử b cắt c tại D.

d. Khẳng định ΔBCD đều là đúng hay sai ?

**Bài 2:** Cho ΔABC vuông tại A, AB = 6cm, AC = 8cm. Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E.

a. Tính $\widehat{BIC}$.

b. Tính diện tích tứ giác ADIE.

**Bài 3:** Cho ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, O là trung điểm của IK.

a. Khẳng định bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O là đúng hay sai ?

b. Khẳng định AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) là đúng hay sai ?

**Bài 4:** Cho đường tròn (O; R). Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (O; R).

**Bài 5:** Cho đường thẳng (d) và một điểm A ở trên đường thẳng đó. Tìm tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm A.

**Bài 6:** Cho đường thẳng (d). Tìm tập hợp tâm các đường tròn có bán kính bằng R và tiếp xúc với đường thẳng (d).

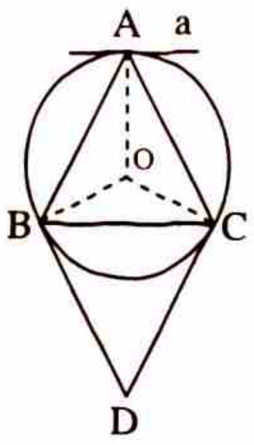
**Bài 7:** Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Tìm tập hợp tâm các đường tròn tiếp xú với hai đường thẳng đó.

**Bài 8:** Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A v tiếp tuyến xy. Từ điểm M trên xy vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đườr cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

a. Khẳng định ba điểm M, H, O thẳng hàng là đúng hay sai ?
b. Xác định dạng của tứ giác AOBH.
c. Tìm quỹ tích của điểm H khi M chạy trên xy.

## D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài 1:** *Hướng dẫn*: Ta có ngay:




- Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với OB.
- Tiếp tuyến qua C là đường thẳng c qua C và vuông góc với OC.

Xét ΔBCD, ta có:

DB = DC, tính chất hai tiếp tuyến với đường tròn cùng đi qua D

$$\widehat{CBD} = \widehat{OBD} - \widehat{OBC} = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

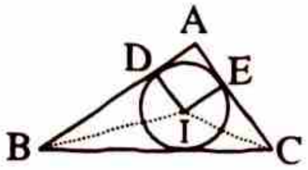
do đó ΔBCD đều (tam giác cân có một góc bằng $60^0$).

**Bài 2:**

a. Trong ΔIBC, ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB})$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \frac{1}{2}.90^0 = 135^0.$$




b. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Xét tứ giác ADIE, ta có:

$$\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^0 \text{ và } ID = IE = r \Rightarrow ADIE \text{ là hình vuông}$$

do đó $S_{ADIE} = ID^2 = r^2$.

Trong ΔABC, ta có:

$$S\Delta ABC = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}p.r = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r$$

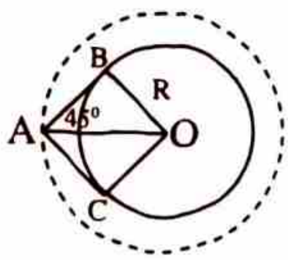
$$\Leftrightarrow r = \frac{AB.AC}{AB + AC + \sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{6.8}{6 + 8 + \sqrt{6^2 + 8^2}} = 2cm.$$

Vậy ta được:

$$S_{ADIE} = 2^2 = 4cm^2.$$

**Bài 3:** Đúng.

**Bài 4:** Ta thực hiện theo các phần sau:




***Phần thuận***: Giả sử tồn tại điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.

Trong ΔOAB, ta có:

$$\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45^0 \Rightarrow BA = OB = R$$

$$OA = \sqrt{OB^2 + BA^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow \text{A thuộc đường tròn } (O; R\sqrt{2}).$$

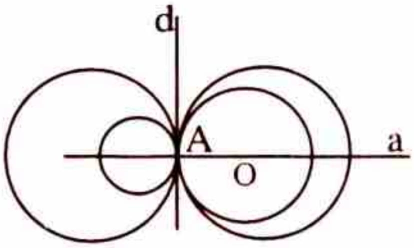
***Phần đảo***: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn (O, 2R). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O; R). Ta phải chứng minh $\widehat{BAC} = 60^0$.

Trong ΔOAB, ta có:

$$\sin\widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0 \Rightarrow \widehat{BAO} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 90^0.$$

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm A là đường tròn (O; $\sqrt{2}$ ).

**Bài 5:** Đáp số trắc nghiệm C.

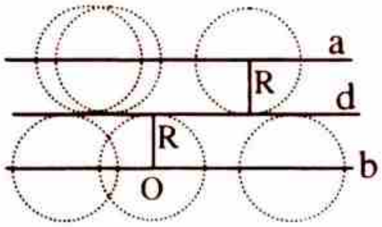



*Hướng dẫn*: Đường tròn (O) tiếp xúc với d tại A

$\Rightarrow OA \perp d$

Vậy, quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với d tại A là đường thẳng a qua A và vuông góc với d.

**Bài 6:** Đáp số trắc nghiệm C.

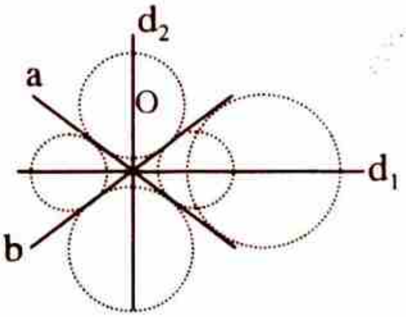



*Hướng dẫn*: Đường tròn (O; R) tiếp xúc với d nếu:

d(O, d) = R.

Vậy, quỹ tích tâm các đường tròn có bán kính R tiếp xúc với d là hai đường thẳng a, b song song và khoảng cách từ chúng đến d bằng R.

**Bài 7:** Đáp số trắc nghiệm D.



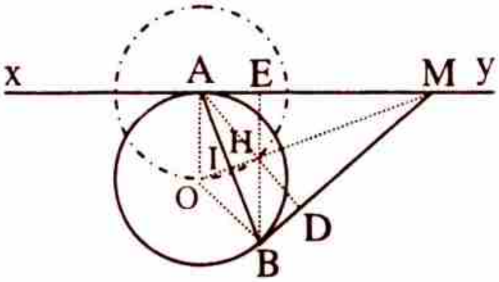

*Hướng dẫn*: Đường tròn (O) tiếp xúc với a và b:

d(O, a) = d(O, b).

Vậy, quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với a và b là hai đường phân giác $d_1$ và $d_2$ của góc tạo bởi a và b.

**Bài 8:**

a. Đáp số trắc nghiệm A.




*Lời giải tự luận*: Gọi I là trung điểm AB.

- Vì MA, MB là tiếp tuyến nên M, O, I thẳng hàng.
- Vì ΔMAB cân tại M nên MI là đường cao do đó M, H, I thẳng hàng.

Vậy, ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

*Lời giải tự luận*: Xét tứ giác AOBH, ta có:

AO // BH, vì cùng vuông góc với MA.

AH // OB, vì cùng vuông góc với MB.

do đó AOBH là hình bình hành.

Mặt khác, ta có ngay OA = OB = R.

Vậy, AOBH là hình thoi (vì nó là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau).

c. Đáp số trắc nghiệm A.

*Lời giải tự luận*: Theo kết quả câu a), ta có:

$AH = OA = R \Rightarrow H \in (A, R)$.

***Hạn chế quĩ tích***: *Học sinh tự làm.*

# CHỦ ĐỀ 7 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung, bởi vì qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn, còn qua ba điểm không thẳng hàng chỉ có một đường tròn duy nhất.

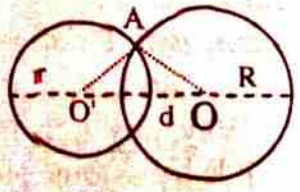
Như vậy, hai đường tròn phân biệt chỉ có thể:

- Có hai điểm chung.
- Có một điểm chung duy nhất.
- Không có điểm chung.

☛ *Chú ý*: Hai đường tròn nếu có nhiều hơn hai điểm chung thì chúng trùng nhau.

### 1. HAI ĐƯỜNG TRÒN CÓ HAI ĐIỂM CHUNG

Cho hai đường tròn (O; R) và (O', r) với R > r và d = OO': Trường hợp này gọi là *hai đường tròn cắt nhau*, mỗi điểm chung gọi là một *giao điểm*.



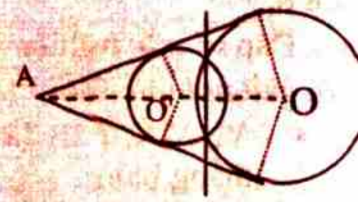

Sử dụng bất đẳng thức tam giác trong ΔAOO' ta có:

$$OA - O'A < OO' < OA + O'A,$$

từ đó suy ra điều kiện:

$$R - r < d < R + r.$$

☛ *Nhận xét*: Hai đường tròn cắt nhau:

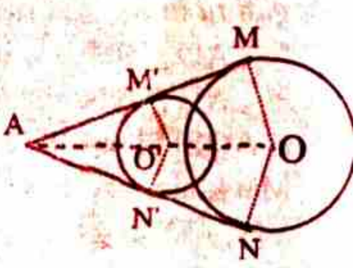



1. Có hai tiếp tuyến chung và chúng đồng quy với đường thẳng OO'.
2. Nếu bài toán cần vẽ đường phụ, ta thường vẽ thêm dây chung của chúng.

***Bài toán***: Cho hai đường tròn (O; R) và (O', r) với r < R cắt nhau tại A và B. Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó, biết OO' = d.

✍ *Giải*

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến chung của hai đường tròn và M, M' theo thứ tự là tiếp điểm của tiếp tuyến chung với (O; R) và (O', r). Gọi A là điểm đồng quy của hai tiếp tuyến với OO', ta có:




$$\frac{AO'}{AO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{r}{R} \Rightarrow AO' = (AO' + O'O).\frac{r}{R}$$

$$\Leftrightarrow AO' = \frac{rd}{R - r} \Rightarrow \text{xác định được vị trí của điểm A.}$$

Khi đó:

- Tiếp điểm M' là giao điểm của (O') và đường tròn đường kính AO'.
- Tiếp điểm M là giao điểm của đường thẳng AM' và đường tròn (O).

***Cách dựng***: Ta thực hiện:

- Xác định điểm A trên tia OO' sao cho $AO' = \dfrac{rd}{R-r}$.
- Dựng đường tròn đường kính AO', đường tròn này cắt (O') tại M'.
- Dựng đường thẳng AM', đó chính là tiếp tuyến chung cần dựng.

***Chứng minh***: Ta có ngay:

$\widehat{AM'O'} = 90^0 \Rightarrow$ AM' là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ngoài ra, ta cũng có:

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AO'}{AO'+O'O} = \frac{\dfrac{rd}{R-r}}{\dfrac{rd}{R-r}+d} = \frac{r}{R} = \frac{O'M'}{OM}$$

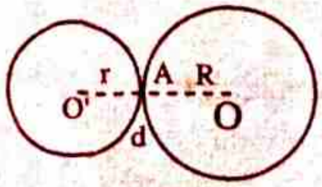
$\Rightarrow OM // O'M' \Rightarrow OM \perp AM \Rightarrow$ AM' là tiếp tuyến của đường tròn (O').

***Biện luận***: Bài toán có hai nghiệm hình (tức là tồn tại hai tiếp tuyến chung của (O) và (O')).

## 2. HAI ĐƯỜNG TRÒN CHỈ CÓ MỘT ĐIỂM CHUNG

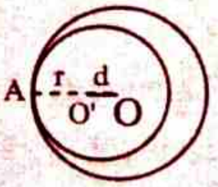
Cho hai đường tròn (O; R) và (O', r) với R > r và d = OO'. Trường hợp này gọi là *hai đường tròn tiếp xúc nhau*, và điểm chung duy nhất được gọi là *tiếp điểm*. Ta có hai khả năng tiếp xúc:

*Tiếp xúc ngoài*




d = R + r

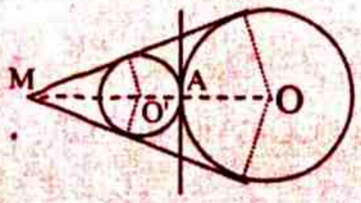
*Tiếp xúc trong*

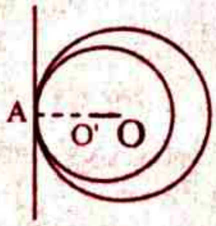



d = R − r

☛ ***Nhận xét***:

- Hai đường tiếp xúc ngoài với nhau có ba tiếp tuyến chung.




- Hai đường tiếp xúc trong với nhau có một tiếp tuyến chung.
- Hai đường tiếp xúc với nhau mà cần vẽ đường phụ, ta thường vẽ thêm tiếp tuyến chung của chúng.

## 3. HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG CÓ ĐIỂM CHUNG

Cho hai đường tròn (O; R) và (O', r) với R > r và d = OO'. Trường hợp này gọi là *hai đường tròn không giao nhau.*

Ta có hai khả năng:

<u>*Ngoài nhau*</u>

$d > R + r$

<u>*Trong nhau*</u>

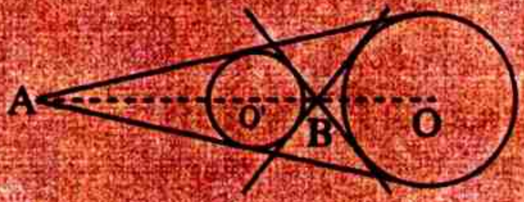
$d < R - r$

☛ ***Chú ý:***

a. Hai đường tròn phân biệt cùng tâm (d = 0) gọi là hai đường tròn *đồng tâm.*

b. Hai đường tròn ngoài nhau có bốn tiếp tuyến chung, trong đó:

- Có hai tiếp tuyến chung cắt đoạn OO'.
- Có hai tiếp tuyến chung không đoạn cắt OO'.

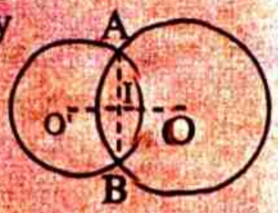



c. Hai đường tròn ở trong nhau không có tiếp tuyến chung

## 4. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

*Tính chất 1:* Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.

*Tính chất 2:* Nếu hai đường tròn cắt nhau thì dây cung vuông góc với đường nối tâm và bị đường này chia làm hai phần bằng nhau.



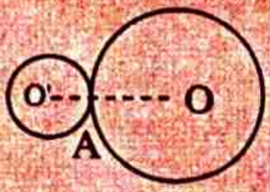

Cụ thể, theo hình vẽ ta có:

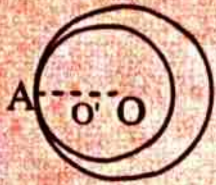
$OO' \perp AB$

và $IA = IB$.

*Tính chất 3:* Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Cụ thể, theo hình vẽ sau ta có O, O', A thẳng hàng.



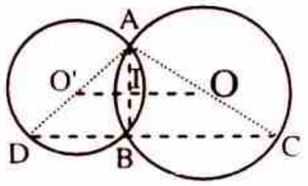



## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Ví dụ 1:** *Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và AO'D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng và AB vuông góc với CD.*

*Giải*

Gọi I là giao điểm của AB và OO', suy ra I là trung điểm của AB.




- Trong $\Delta ABC$, ta có OI là đường trung bình, nên:
  OI // BC.
- Trong $\Delta ABD$, ta có O'I là đường trung bình, nên:
  O'I // BD.

Suy ra OO' // BC // BD, nên ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Vì: $AB \perp OO' \Rightarrow AB \perp CD$.

***Nhận xét***:

1. Trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã tận dụng đầy đủ tính chất của hai đường tròn cắt nhau.
2. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính chất của hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

**Ví dụ 2:** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O', r) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B thuộc đường tròn (O), C thuộc đường tròn (O').*

a. *Chứng minh rằng $\Delta$ ABC là tam giác vuông.*

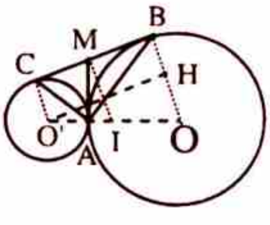
b. *Tính số đo góc $\widehat{OMO'}$.*

c. *Tính diện tích tứ giác BCO'O theo R và r.*

d. *Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường (I, IM).*

*Giải*

a. Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong, cắt BC tại M, ta có:




$$\begin{cases} MA = MB & \text{tính chất tiếp tuyến của } (O, R) \\ MA = MC & \text{tính chất tiếp tuyến của } (O', r) \end{cases}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = \frac{1}{2}BC.$$

Tức là, $\Delta ABC$ có trung tuyến AM ứng với cạnh BC bằng nửa cạnh đó nên là tam giác vuông.

b. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

- MO là tia phân giác của góc $\widehat{AMB}$.
- MO' là tia phân giác của góc $\widehat{AMC}$.

Suy ra:

$\widehat{OMO'} = 90^0$ (vì nó hợp bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù)

c. Tứ giác BCO'O có OB// O'C (vì cùng vuông góc với BC) nên tứ giác này là hình thang, do đó:

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2}(OB + O'C)BC.$$

Hạ O'D vuông góc với OB, suy ra tứ giác BCO'H là hình chữ nhật nên:

BC = O'H.

Trong ΔOO'H ta có:

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr \Rightarrow O'H = 2\sqrt{Rr}.$$

Vậy, ta được:

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2}(R + r).2\sqrt{Rr} = \sqrt{Rr}(R + r).$$

d. Ta có ngay IM là đường trung bình của hình thang BCO'O, do đó:

$IM // OB \Rightarrow IM \perp BC$.

Vậy, BC là tiếp tuyến của đường tròn (I, IM).

☞ ***Nhận xét***:

1. Ta cũng có OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.
2. Chúng ta đã biết rằng " *Nếu đường thẳng d đi qua một điểm ở bên trong đường tròn (O) thì nó cắt đường tròn này* " và câu hỏi được đặt ra ở đây là nếu thay đường thẳng d bằng một đường tròn thì có thể kết luận được gì về vị trí tương đối của hai đường tròn này. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ nhận định này.

**Ví dụ 3:** *Chứng minh rằng nếu một đường tròn đi qua một điểm bên trong và một điểm bên ngoài một đường tròn khác thì hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm.*

✍ *Giải*

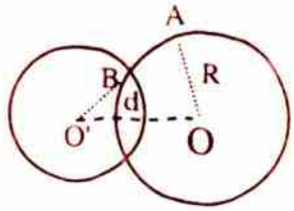
Giả sử đường (O) đi qua A và B, trong đó A ở bên ngoài (O'), B ở bên trong (O'). Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của các đường tròn (O), (O').

Ta có:

OA = OB = R, O'A > r và O'B < r.

Xét ΔOO'B ta có:

$OO' \le OB + O'B < R + r$. (1)




- Nếu $R \ge r$ thì trong ΔOO'B, ta có:
  $OO' \ge OB - O'B > R - r$. (2)
- Nếu $r \ge R$ thì trong ΔOO'A, ta có:
  $OO' \ge O'A - OA > r - R$ (3).

Từ đó ta được:

$|R - r| < OO' < R + r \Leftrightarrow$ hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau.

☛ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng các kiến thức:

- Vị trí tương đối của một điểm với đường tròn.
- Hệ thức liên hệ giữa các cạnh của tam giác.

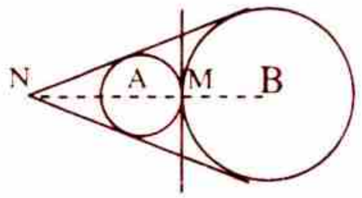
Để từ đó nhận được bất đẳng thức $|R - r| < OO' < R + r$.

**Ví dụ 4:** *Cho đoạn thẳng AB và một điểm M không trùng với. Vẽ các đường tròn (A, AM) và (B, BM). Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này, từ đó suy ra số tiếp tuyến chung của chúng.*

✍ *Giải*

Để xét vị trí tương đối của hai đường tròn (A, AM) và đường tròn (B; BM), ta phải xét các trường hợp vị trí của điểm M đối với đoạn thẳng AB.

*Trường hợp 1*: Điểm M nằm giữa A và B, ta có:

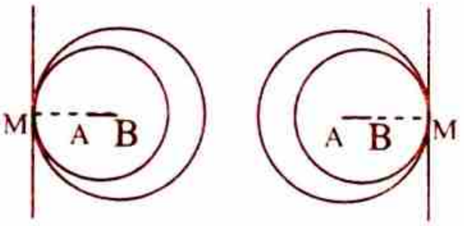



$AB = AM + MB \Leftrightarrow d = R + r.$

Vậy, hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau và do đó chúng có ba tiếp tuyến chung.

*Trường hợp 2*: Điểm M nằm trên tia đối của tia AB (hoặc tia đối của tia BA), ta có:

$$\left[\begin{array}{l} AB = BM - AM \Leftrightarrow d = R - r \\ AB = AM - BM \Leftrightarrow d = r - R \end{array}\right.$$

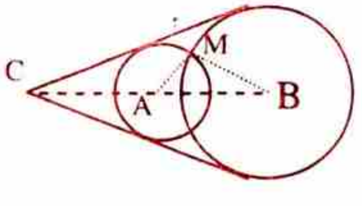



Vậy, hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau và do đó chúng có một tiếp tuyến chung.

*Trường hợp 3*: Điểm M nằm ngoài đường thẳng AB, ta có:

$$|MB - MA| < AB < MB + MA$$

$$\Leftrightarrow |R - r| < d < R + r.$$




Vậy, hai đường tròn cắt nhau và do đó chúng có hai tiếp tuyến chung.

☛ **Nhận xét**: Để tránh bỏ sót trường hợp, các em học sinh hãy nhớ lại vị trí tương đối của điểm và đường thẳng, cụ thể với điểm M và đường thẳng AB (M không trùng với A, B) cho trước, ta có:

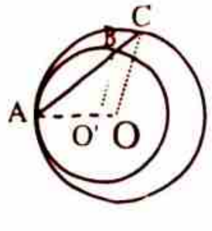
1. Nếu M thuộc đường thẳng AB, khi đó:
   - M nằm giữa A và B.
   - A nằm giữa M và B.
   - B nằm giữa M và A.
2. M không thuộc đường thẳng AB.

**Ví dụ 5:** *Cho hai đường tròn* (O; R) *và* (O', r) *tiếp xúc với nhau tại* A. *Vẽ một cát tiếp qua* A *cắt hai đường tròn tại* B *và* C. *Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại* B *và* C *song song với nhau.*

✍ *Giải*

Xét hai khả năng tiếp xúc của (O; R) và (O', r).

*Trường hợp 1*: Nếu (O; R) và (O', r) tiếp xúc trong với nhau

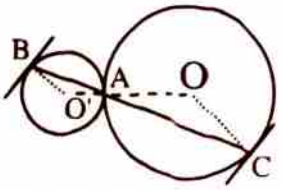



Trong ΔOAC, ta có:

$$\frac{O'B}{OC} = \frac{r}{R} = \frac{O'A}{OA} \Rightarrow O'B \,//\, OC$$

Nên các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau vì chúng vuông góc với O'B và vuông góc với OC.

*Trường hợp 2*: Nếu (O; R) và (O', r) tiếp xúc ngoài với nhau




Ta có:

$$\frac{O'B}{OC} = \frac{r}{R} = \frac{O'A}{OA} \Rightarrow O'B \,//\, OC.$$

Nên các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau vì chúng vuông góc với O'B và vuông góc với OC.

☛ ***Nhận xét***: Cũng với nhận xét như trong ví dụ trước, các em học sinh hãy nhớ rằng với giả thiết " *Hai đường tròn tiếp xúc với nhau* " chúng ta cần xét hai trường hợp, đó là:

- Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

## C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho ba đường tròn tâm $O_1$, $O_2$, $O_3$ cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

**Bài 2:** Cho đoạn thẳng AB = 2a. Gọi M là trung điểm của AB.

a. Vẽ các đường tròn (A; a) và (B; a). Chứng minh rằng hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau.

b. Vẽ một đường tròn tâm M cắt hai đường tròn (A) và (B) lần lượt tại C, D, E, F (C và F cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

c. Xác định bán kính của đường tròn (M) để cho tứ giác CDEF là hình vuông.

**Bài 3:** Cho đường (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (B; BO), cắt đường tròn (O) ở C, D.

a. Xác định dạng tứ giác OCDB.

b. Xác định dạng tam giác ACD.

**Bài 4:** Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Tính dây cung AB biết OA = 20cm, O'A = 15cm.

**Bài 5:** Cho hai đường tròn (O;; 17cm) và (O'; 10cm) cắt nhau tại A và B. Biết OO' = 21cm. Tính AB.

**Bài 6:** Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Qua A, kẻ đường thẳng vuông góc với AM, cắt các đường tròn (O) và (O') ở C và D. Chứng minh rằng AC = AD.

**Bài 7:** Cho đường tròn (O; OA), điểm I thuộc bán kính OA sao cho $AI = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn (I, IA).

a. Xác định vị trí của các đường tròn (O) và (I).

b. Kẻ một đường thẳng qua A, cắt các đường tròn (I) và (O) theo thứ tự ở B và C. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

**Bài 8:** Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên bán kính OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB.

a. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước.

b. Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C. Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D và E (D nằm giữa C và E). Chứng minh rằng AC = CD = DE.

**Bài 9:** Cho đường tròn (O) và đường thẳng a không giao nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên a. Tia đối của tia OH cắt đường tròn tại A. Vẽ đường thẳng b $\perp$ a tại điểm B trên đường thẳng a. Đoạn thẳng AB cắt đường tròn tại C. Tia OC cắt b tại I. Chứng minh rằng đường tròn (I; IB) tiếp xúc với đường thẳng a và đường tròn (O).

**Bài 10:** Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (D; DC) và đường tròn đường kính BC, chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AD.

**Bài 11:** Cho đường tròn (O) và một điểm A ở trên đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) đi qua O và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Qua A vẽ tiếp tuyến chung xy với hai đường tròn. Dây AC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại M. Tia CO cắt đường tròn tâm I tại N. Đường thẳng OM cắt xy và tia AN lần lượt tại B và D. Chứng minh rằng:

a. MA = MC.

b. Tứ giác ABCD là hình thoi.

**Bài 12:** Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, vẽ đường tròn O' tiếp xúc với AB tại B, hai đường tròn này luôn luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Tìm quỹ tích tiếp điểm M của hai đường tròn.

**Bài 13:** Cho đoạn thẳng OO' = 4cm. Vẽ đường tròn (O; 2cm) và (O'; 1cm).

a. Hãy xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn đó.

b. Dựng đường tròn (I; 1,5cm) tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O').

**Bài 14:** Cho trước đường tròn (O, 2cm) và đường thẳng xy tiếp xúc với (O) tại A. Dựng đường tròn (I; 1cm) tiếp xúc với đường tròn (O) và tiếp xúc với xy.

# D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

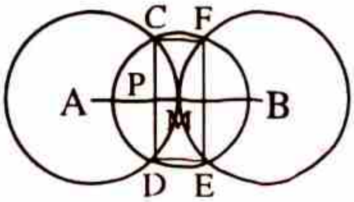
**Bài 1:** Xét $\Delta O_1O_2O_3$, ta có:

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2R$

$\Leftrightarrow \Delta O_1O_2O_3$ đều và có cạnh bằng 2R

do đó:

$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}.$$




**Bài 2:** *Hướng dẫn*:

a), b) học sinh tự chứng minh.

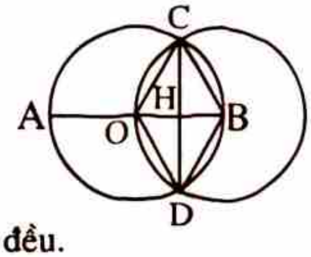
Để CDEF là hình vuông điều kiện là:

$CE \perp DF \Leftrightarrow \widehat{AMC} = 45^0$.

Khi đó, trong tam giác $\Delta ACM$ cân tại A với $\widehat{AMC} = 45^0$, ta được:

$CM = a\sqrt{2}$.

**Bài 3:**




a. Ta có ngay:

OC = OD = OB và BC = BD = BO

$\Rightarrow$ OC = CB = BD = DO $\Leftrightarrow$ OCDB là hình thoi.

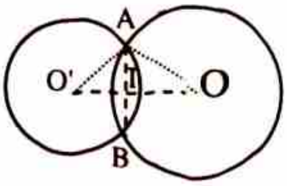
b. Trong $\Delta ABC$ vuông tại C, ta có:

$$BC = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 30^0 \Rightarrow \widehat{CAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta ACD \text{ đều.}$$

**Bài 4:** Gọi I là trung điểm của AB, suy ra:

AB = 2AI và $AI \perp OO'$.

Trong $\Delta OAO'$ vuông tại A, ta có:




$$S_{\Delta OAO'} = \frac{1}{2}OA.O'A = \frac{1}{2}AI.OO' = \frac{1}{2}AI.\sqrt{OA^2 + O'A^2}$$

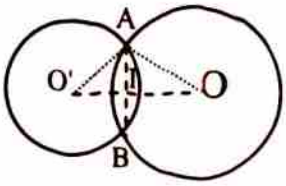
$$\Leftrightarrow AI = \frac{OA.O'A}{\sqrt{OA^2 + O'A^2}} = \frac{20.15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 12cm.$$

Vậy, ta được AB = 24cm.

**Bài 5:** Gọi I là trung điểm của AB, suy ra:

AB = 2AI và $AI \perp OO'$.

Trong $\Delta OAO'$, ta có:




$$S_{\Delta OAO'} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}AI.OO'$$

$$\Leftrightarrow AI = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{OO'} = \frac{2\sqrt{24.3.14.7}}{21} = 8cm.$$

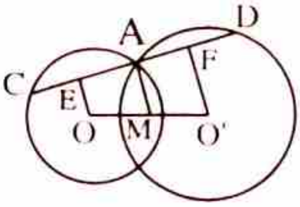
Vậy, ta được AB = 16cm.

**Bài 6:** Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, AD, suy ra:

$OE \perp AC$ và $AE = CE$

$O'F \perp AD$ và $AF = DF$

$\Rightarrow OE // MA // O'F$.




Khi đó, tứ giác OO'FE có:

$OE // O'F \Rightarrow$ OO'FE là hình thang

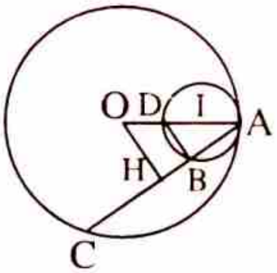
từ đó AM là đường trung bình của OO'FE, suy ra:

$EA = FA \Leftrightarrow 2EA = 2FA \Leftrightarrow AC = AD$ (đpcm).

**Bài 7:**

a. Ta có:

$OI = OA - IA \Leftrightarrow$ (O) và (I, IA) tiếp xúc trong với nhau.




b. Kẻ OH vuông góc với CD, ta được:

$CH = AH$

Mặt khác, ta có:

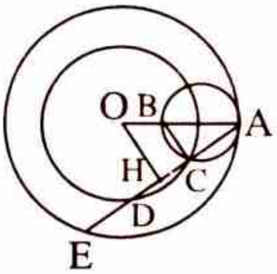
$\widehat{ABD} = 90^0 \Leftrightarrow BD \perp AB \Rightarrow BD // OH$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AO} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AB}{2AH} = \frac{2}{2.3} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}.$$

**Bài 8:**

a. Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$OI = OA - IA \Leftrightarrow$ (O) và (AB) tiếp xúc trong với nhau.




b. Kẻ OH vuông góc với CD, ta được:

$CH = DH$ và $AH = EH$

do đó:

$AC = AH - CH = EH - DH = ED$.

Mặt khác, ta có:

$$\widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow BC \perp AC \Rightarrow BC // OH \Rightarrow \frac{AC}{CH} = \frac{AB}{BO} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow AC = 2CH = CD$.

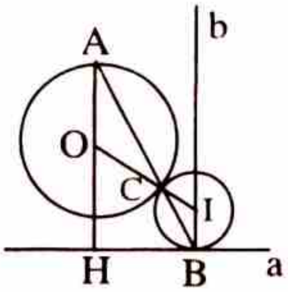
Vậy, ta đã chứng minh được $AC = CD = DE$.

**Bài 9:** Nhận xét rằng:

$OA // IB$, vì cùng vuông góc với a

$$\Rightarrow \Delta OAC \backsim \Delta IBC \Rightarrow \frac{OA}{IB} = \frac{OC}{IC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{OA}{OC} = 1 \Leftrightarrow IB = IC.$$

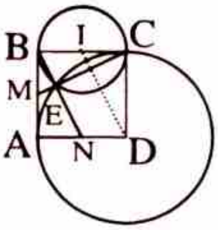



Khi đó:

Vì $IB \perp a$ nên (I, IB) tiếp xúc với a.

Vì $IO = IC + OC = OC + IB$ nên (I, IB) tiếp xúc với (O).

**Bài 10:** Gọi I là trung điểm của AB.




Xét hai tam giác vuông $\Delta CDI$ và $\Delta BCM$, ta có:

$CD = BC$, vì hai cạnh hình vuông

$\widehat{CDI} = \widehat{BCM}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc

do đó: $\Delta CDI = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn)

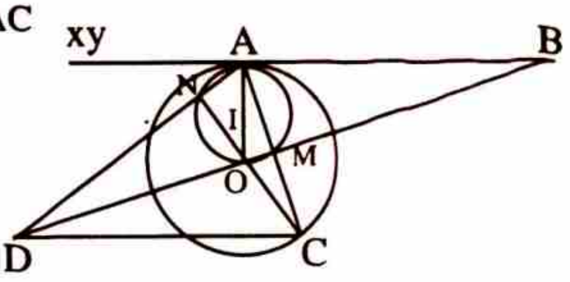
$\Rightarrow BM = CI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow$ M là trung điểm AB.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$\Delta ABN = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn)

$\Rightarrow AN = BM = \frac{1}{2}AD \Leftrightarrow$ N là trung điểm AD.

**Bài 11:**




a. Nhận xét rằng: $\widehat{OMA} = 90^0 \Rightarrow OM \perp AC$

$\Rightarrow MA = MC$ (đpcm).

b. Nhận xét rằng:

$\widehat{OMA} = 90^0 \Rightarrow DM \perp AC.$

$\widehat{ONA} = 90^0 \Rightarrow CN \perp AD.$

Suy ra, O là trực tâm $\Delta ACD$, do đó:

$CD \perp AO \Rightarrow CD \,//\, AB.$

Xét hai tam giác vuông $\Delta MAB$ và $\Delta MCD$, ta có: MA = MC

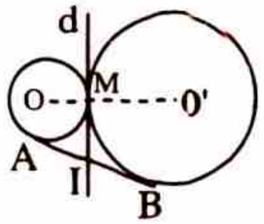
$\widehat{MAB} = \widehat{MCD}$, so le trong

do đó: $\Delta CDI = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn) $\Rightarrow AB = CD.$

Như vậy, tứ giác ABCD có: $AB \overset{//}{=} CD$ và $AC \perp BD$ nên nó là hình thoi.

**Bài 12:**

***Phần thuận***: Dựng tiếp tuyến chung d tại M của hai đường tròn, giả sử d cắt AB tại I.




Trong $\Delta MAB$, ta có:

IA = IM, vì IA, IM đều là tiếp tuyến của (O)

IB = IM, vì IB, IM đều là tiếp tuyến của (O')

suy ra: $IM = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow \Delta MAB$ vuông tại M (vì có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (AB).

***Phần đảo***: Lấy điểm M bất kì trên đường tròn (AB). Ta thực hiện dựng:

- Dựng đường thẳng m qua M và vuông góc với IM.
- Dựng tia phân giác Ix của góc $\widehat{AIM}$, tia Ix cắt m tại O. Dựng đường tròn (O, OM), ta thấy ngay:

  $\Delta OMI = \Delta OAI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OMI} = 90^0 \Leftrightarrow OA \perp AB$

  $\Leftrightarrow$ (O, OM) tiếp xúc với AB tại A.

- Dựng tia phân giác Iy của góc $\widehat{BIM}$, tia Iy cắt m tại O'. Dựng đường tròn (O', O'M) , ta thấy ngay:

  $\Delta O'MI = \Delta O'BI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{O'BI} = \widehat{O'MI} = 90^0 \Leftrightarrow OB \perp AB$

  $\Leftrightarrow$ (O', O'M) tiếp xúc với AB tại B.

Trong cách dựng trên, ta thấy ngay (O) và (O') tiếp xúc với nhau.

***Kết luận***: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (AB).

# MỤC LỤC

## PHẦN ĐẠI SỐ

### CHƯƠNG I. CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

**Chủ đề 1:** Căn bậc hai ............ 5
**Chủ đề 2:** Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ ............ 13
**Chủ đề 3:** Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương ............ 25
**Chủ đề 4:** Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương ............ 35
**Chủ đề 5:** Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai ............ 44
**Chủ đề 6:** Rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai ............ 57
**Chủ đề 7:** Căn bậc ba – Căn bậc n ............ 72
**Bài đọc thêm**: Sơ lược về phương trình, bất phương trình chứa căn bậc hai ............ 84

### CHƯƠNG II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

**Chủ đề 1:** Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số ............ 103
**Chủ đề 2:** Hàm số bậc nhất ............ 121
**Chủ đề 3:** Đồ thị của hàm số bậc nhất ............ 126
**Chủ đề 4:** Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau ............ 134
**Chủ đề 5:** Hệ số góc của đường thẳng ............ 142

## PHẦN HÌNH HỌC

### CHƯƠNG I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

**Chủ đề 1:** Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ............ 149
**Chủ đề 2:** Tỉ số lượng giác của góc nhọn ............ 153

### CHƯƠNG II. ĐƯỜNG TRÒN

**Chủ đề 1:** Sự xác định đường tròn – Tính chất đối xứng của đường tròn ............ 157
**Chủ đề 2:** Đường kính và dây của đường tròn ............ 169
**Chủ đề 3:** Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây ............ 175
**Chủ đề 4:** Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn ............ 177
**Chủ đề 5:** Tiếp tuyến của đường tròn ............ 182
**Chủ đề 6:** Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ............ 195
**Chủ đề 7:** Vị trí tương đối của hai đường tròn ............ 200

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc* PHÙNG QUỐC BẢO
*Tổng biên tập* PHẠM THỊ TRÂM
*Biên tập nội dung*
HẢI NHƯ
*Sửa bài*
LÊ HOÀ
*Chế bản*
CÔNG TI ANPHA
*Trình bày bìa*
SƠN KỲ
*Đối tác liên kết xuất bản*
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

**CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 9 - TẬP 1**
**Mã số: 1L-118ĐH2010**
**In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Song Nguyên**
**Số xuất bản: 89-2010/CXB/15-03/ĐHQGHN, ngày 15/01/2010**
**Quyết định xuất bản số: 118LK-TN/XB**
**In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.**